

2012年7月17日

$n$  を正整数とすると、正整数の列  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  が  $n$  の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

$$(1) \sum_{i=1}^k \lambda_i = n,$$

$$(2) \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k.$$

$p(n)$  で  $n$  の分割の総数を表すと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right)^{-1}.$$

ただし、 $p(0) = 1$  とする。すると、 $p(n)$  の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^n q_m p(n-m) = 0.$$

$$E_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = n, k \text{ は偶数}\},$$

$$O_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = n, k \text{ は奇数}\}$$

とおくと

$$q_n = |E_n| - |O_n|.$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in E_n \cup O_n$  に対して、

$$s(\lambda) = \lambda_k,$$

$$t(\lambda) = \max\{t \mid \forall i: 1 \leq i \leq t, \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}$$

と定義し、 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_l^*)$  を次で定義する。 $s(\lambda) \leq t(\lambda)$  のとき

$$l = k - 1,$$

$$\lambda_i^* = \begin{cases} \lambda_i + 1 & (1 \leq i \leq s(\lambda)), \\ \lambda_i & (s(\lambda) < i \leq k - 1) \end{cases}$$

$s(\lambda) > t(\lambda)$  のとき

$$l = k + 1,$$

$$\lambda_i^* = \begin{cases} \lambda_i - 1 & (1 \leq i \leq t(\lambda)), \\ \lambda_i & (t(\lambda) < i \leq k), \\ t(\lambda) & i = k + 1. \end{cases}$$

$$E'_n = \begin{cases} E_n - \{(2k-1, \dots, k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1), k \text{ は偶数}), \\ E_n - \{(2k, \dots, k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1), k \text{ は偶数}), \\ E_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$O'_n = \begin{cases} O_n - \{(2k-1, \dots, k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1), k \text{ は奇数}), \\ O_n - \{(2k, \dots, k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1), k \text{ は奇数}), \\ O_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと、 $\lambda \mapsto \lambda^*$  は全単射  $E'_n \rightarrow O'_n$  を与える。特に  $|E'_n| = |O'_n|$  となるので

$$\begin{aligned} q_n &= |E'_n| - |O'_n| \\ &= \begin{cases} |E'_n| + 1 - |O'_n| & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1), k \text{ は偶数}), \\ |E'_n| - (|O'_n| + 1) & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1), k \text{ は奇数}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^k & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \end{aligned}$$

例えば、

$$(q_0, q_1, \dots, q_{10}) = (1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

となるので

$$\begin{aligned} p(10) &= -\sum_{i=0}^9 q_{10-i}p(i) = -(-p(9) - p(8) + p(5) + p(3)), \\ p(9) &= -\sum_{i=0}^8 q_{9-i}p(i) = -(-p(8) - p(7) + p(4) + p(2)), \\ p(8) &= -\sum_{i=0}^7 q_{8-i}p(i) = -(-p(7) - p(6) + p(3) + p(1)), \\ p(7) &= -\sum_{i=0}^6 q_{7-i}p(i) = -(-p(6) - p(5) + p(2) + p(0)), \\ p(6) &= -\sum_{i=0}^5 q_{6-i}p(i) = -(-p(5) - p(4) + p(1)), \\ p(5) &= -\sum_{i=0}^4 q_{5-i}p(i) = -(-p(4) - p(3) + p(0)) \end{aligned}$$

ここに  $p(0) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$  を代入して  $p(5) = 7, p(6) = 11, p(7) = 15, p(8) = 22, p(9) = 30, p(10) = 42$  を得る。