

2013年4月9日

命題とは、式や文章で表された事柄で、正しい(真)か正しくない(偽)が明確に定まるもの。

文字(x など)を含んだ命題で、 x の値によって真偽が変わるものを(x に関する)条件という。

- 条件 p の否定を \bar{p} と書く。明らかに $\bar{\bar{p}} = p$
- $p \wedge q$ (“ p and q ,” “ p かつ q ” とも書く)
- $p \vee q$ (“ p or q ,” “ p または q ” とも書く)
- $(\bar{p} \vee q)$ を $(p \implies q)$ と書く。
- $((p \implies q) \wedge (q \implies p))$ を $p \iff q$ と書く。
- $p \implies q$ が成り立つとき p を q の十分条件、 q を p の必要条件という。
- $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $(p \implies q) = (\bar{q} \implies \bar{p})$ (対偶)
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

次の命題

すべての実数 x に対し、 $x^2 \geq 0$ である

は、無限個の命題を \wedge で結んだものと考えられる。一般に、 $q(x)$ を x に関する条件とすると、

$$\forall x, \quad q(x)$$

によって、想定されるすべての x について $q(x)$ が真である、ということを表すが、「想定される」 x を条件 $p(x)$ によって規定するときには

$$\forall x : p(x), \quad q(x)$$

と書く。例えば

$$\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x + 1 > 0$$

は真であるが、

$$\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 > 0$$

は偽である。一方、

$$\exists x, \quad p(x)$$

によって、想定されるどれかの x について $p(x)$ が真である、ということを表す。「 $p(x)$ を満たす x が存在する」または「ある x に対して $p(x)$ が成り立つ」と読む。

また、詳しくは次回紹介するが、「集合」を用いることで「 $\forall x$: 実数」を「 $\forall x \in \mathbb{R}$ 」と書くことができる。例えば

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 > 0$$

は真であり、

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0$$

も真である。さらに、

$$\left(\overline{\forall x, p(x)} \right) = \left(\exists x, \overline{p(x)} \right).$$

同様に、正整数の集合は \mathbb{N} , 整数の集合は \mathbb{Z} , 有理数の集合は \mathbb{Q} , 複素数の集合は \mathbb{C} で表す。

- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq 1$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \left(\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0, \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{1000} \right)$

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0, \left(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \left(\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0, |a_n - a| < \varepsilon \right) \right)$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ を \mathbb{R}^n のベクトルとする。これらが一次独立とは

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \text{ となるのは } (c_1, c_2, \dots, c_k) = (0, 0, \dots, 0) \text{ のときに限る}$$

が成り立つときをいう。これを論理記号 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ などを用いて書き直してみよ。また一次独立でない（一次従属という）という条件をこれらの記号で書き表してみよ。

定理 1. A を $m \times n$ 行列とする。このとき、 $\text{rank } A$ は、 A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

定理 2. s, t を正の整数とする。 s の任意の素因数 p が t を割り切るならば、 t を何乗かした t^n が s で割り切れる。

定理 3. $f(x), g(x)$ を複素数を係数に持つ x の多項式とする。 $f(a) = 0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a) = 0$ が成り立てば、 $g(x)$ を何乗かした $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。

これらの定理を論理記号を用いて書き表してみよ。