2013年4月9日の講義の補足説明

- 真＝T, 偽＝F と書く。
- 命題の例としては、「円周率は 3 より大きい。」や、「富士山は日本一高い山である。」など。偽でも良いので、「円周率は 3 より小さい。」も命題である。
- $p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$
- x に関する条件でも、x を強調する必要がないときは p と書く。x を強調する必要がある場合は $p(x)$ と書く。
- 2011 年 2 月に実施された東北大学の学部入試では、次のような問題が出題されている。「$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすすべての a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすいずれかの a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。」実は、ここには無限個の「かつ」「または」が使われている。
- 15 の約数はすべて奇数である。16 の約数の中には奇数のものがある。これらの違いを記述するのに便利な記号が $\forall, \exists$ である。実際には、「かつ」「または」が何度も使われている命題を省略して記述するための記号である。
- さらに、「かつ」「または」が無限回使われることもある。
- $\forall x : \text{実数},\ x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$
- $x = 1$ とすると $x^2 - x - 1 = -1 < 0$
- $(\forall x : p(x),\ q(x))$ と書くことにより、$p(x)$ を満たす x のみに対して $\forall$ を適用する、ということを表す。
- $(\exists x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 > 0)$ であることを確認するためには、例えば $x = 2$ とすればこの不等式が成立する、ということのみ述べれば良い。この命題の否定は $(\exists x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0)$ ではない（これもまた $x = 0$ とすれば真になっている）。否定は
$$\big(\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0\big)$$
となる。
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} \leq 1$ は真である。
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 10,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。
- $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。

- $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \epsilon$ も真である。これが次に定式化する極限の定義である。

- 極限 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数で } n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$

  だが、

$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数}, n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon))$$

  と書くこともある。極限の定義自体は、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 a が与えられたときに命題となるが、

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$

  は ε に関する条件であり、その中に入っている

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon)$$

  は ε, n_0 に関する条件さらに、

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

  は ε, n に関する条件である。したがって、例えば$\forall \varepsilon > 0$ のようなものが前についたとき初めて命題として真偽が定まる。

- 一次独立性は

$$\forall c_1, \forall c_2, \ldots, \forall c_k \in \mathbb{R},\ \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{a}_i = 0 \implies (c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0) \right)$$

  これにはもう一つの述べ方がある。

$$\forall c_1, \forall c_2, \ldots, \forall c_k \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{a}_i = 0,\ (c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0)$$

  前者では $\implies$ を使っているが、後者では $\forall$ で想定する $c_1, \ldots, c_k$ の付帯条件として記述されている。これらが同じことを意味していることは次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned}
&(\forall x,\ (p(x) \implies q(x))) \\
&\iff (\forall x,\ (\overline{p(x)} \vee q(x))) \\
&= (\forall x : p(x),\ (\overline{p(x)} \vee q(x))) \wedge (\forall x : \overline{p(x)},\ (\overline{p(x)} \vee q(x))) \\
&= (\forall x : p(x),\ (F \vee q(x))) \wedge (\forall x : \overline{p(x)},\ (T \vee q(x))) \\
&= (\forall x : p(x),\ q(x)) \wedge (\forall x : \overline{p(x)},\ T) \\
&= (\forall x : p(x),\ q(x)) \wedge T \\
&= (\forall x : p(x),\ q(x))
\end{aligned}$$

- A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。例えば行列
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$
の３次小行列式（４通りある）はすべて 0 であり、２次小行列式は例えば左上隅をとれば
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$
なので、階数は 2 ということがわかる、という意味である。

- 整数 h が k で割り切れるとき $k|h$ と書く。

- 多項式 $G(x)$ が $F(x)$ で割り切れるとき $F(x)|G(x)$ と書く。

- 整数にしろ多項式にしろ、割り切れないときは $\nmid$ と書く。

定理 2.

> s, t を正の整数とする。s の任意の素因数 p が t を割り切るならば、t を何乗かした t^n が s で割り切れる。

から、まず仮定と結論を抽出して $\implies$ で結ぶと

> ($p|s$ なる任意の素因数 p に対して $p|t$) $\implies$ (t を何乗かすると s で割り切れる)

さらに、意味を変えずに順序を変え、記号 $|$ を用いると

> (任意の素数 p:$p|s$, $p|t$) $\implies$ (ある正整数 n が存在して $s|t^n$)

論理記号を用いて書き換えると

> $(\forall p$:(素数, $p|s$), $p|t)$ $\implies$ $(\exists n \in \mathbb{N}, s|t^n)$

次に、$P \implies Q$ を $\bar{P} \vee Q$ に書き換えて

> $\overline{(\forall p : (\text{素数},\ p|s),\ p|t)} \vee (\exists n \in \mathbb{N}, s|t^n)$

ここで、$\vee$ の前だけ書き換えて行く。

$$\begin{aligned} \overline{\forall p : (\text{素数},\ p|s),\ p|t} &= \overline{\forall p : \text{素数},\ (p|s \implies p|t)} \\ &= \exists p : \text{素数},\ \overline{(p|s \implies p|t)} \\ &= \exists p : \text{素数},\ \overline{(p \nmid s \vee p|t)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exists p: 素数,\ \overline{p \nmid s} \wedge \overline{p | t} \\
&= \exists p: 素数,\ p | s \wedge p \nmid t \\
&= \exists p: 素数,\ p \nmid t \wedge p | s
\end{aligned}
$$

よって

$$(\exists p: 素数,\ p \nmid t \wedge p | s) \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ s | t^n)$$

これを通常の簡潔な言葉で書き直すと、

> t を割り切らない s の素因数が存在するか、または t を何乗かすると s で割り切れる。

このことをイメージするには、集合の概念が便利である。それを次回に扱う。
今日の小テストは成績に加味しない。