

2013年4月16日

集合とは、ものの集まりであり、ここでいう「もの」とは何でも良い。ただ、与えられた「もの」がその集合に属するかどうかは明確に定まっていなければならない。前回の講義では、命題はその真偽が明確に定まっているもの、と定義した。 x に関する条件 $p(x)$ は x を定めるごとに真偽が明確に定まる命題となるので、 $p(x)$ が真となるような x すべてを集めると集合ができる。これを

$$\{x \mid p(x)\}$$

と表す。 $p(x)$ が真となるような x が有限個しかない場合、または無限個あっても列挙して理解しやすい場合は

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ または } \{x_1, x_2, \dots\}$$

と表す。

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は自然数の集合、整数の集合、有理数の集合、実数の集合、複素数の集合を表す。

$A = \{x \mid p(x)\}$ とするとき、 $p(x)$ が真のとき $x \in A$, $p(x)$ が偽のとき $x \notin A$ と書く。

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とするとき、

$$(x = x_1) \vee (x = x_2) \vee \dots \vee (x = x_n)$$

のとき $x \in A$, そうでないとき $x \notin A$ と書く。 $x \in A$ は「 x は A に属す」、「 x は A の元である」、「 x は A の要素である」、「 A は x を含む」、などと読む。

従って逆に、集合 A に対して、 $x \in A$ は x に関する条件と言える。他にも、条件について前回導入した記号に対応して、集合について記号を定義する。 $A = \{x \mid p(x)\}$, $B = \{x \mid q(x)\}$ とするとき、

条件	集合
$p(x) \implies q(x)$	$A \subset B$
$p(x) \iff q(x)$	$A = B$
$p(x) \wedge q(x)$	$A \cap B$
$p(x) \vee q(x)$	$A \cup B$
$\overline{p(x)}$	\overline{A}
$\overline{p(x) \wedge q(x)}$	$A - B$

前回の定理2にあった「 s の任意の素因数 p が t を割り切るならば、」は、

$$P(s) = \{p \mid p \text{ は } s \text{ の素因数}\}$$

という集合を導入することで、「 $P(s) \subset P(t)$ 」と簡単に表せる。

集合論の教科書でよくある演習問題： $A \cup B = B \iff A \subset B$.

分配法則

$$(p \wedge (q \vee r)) = ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)),$$

$$(p \vee (q \wedge r)) = ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

が成り立つことから、

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

がわかる。

空集合とは元をひとつも含まない集合。 \emptyset または $\{\}$ と書く。したがって、 $x \in \emptyset$ は常に偽である。

A_1, A_2, \dots を集合とするとき、

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

と書く。 $A_n = \{x \mid p_n(x)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) の場合

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, p_n(x),$$

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x).$$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}}$ はそれぞれ $\bigcup_{n=1}^{\infty}, \bigcap_{n=1}^{\infty}$ と書くこともあるが、極限操作や無限大 ∞ とは実際には無関係であることに注意。

さらに一般に、 I を集合とし、 I の各元 $i \in I$ に対して x に関する条件 $p(i, x)$ が定まっているとする。 $A_i = \{x \mid p(i, x)\}$ とおくと

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, p(i, x)\}, \tag{1}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, p(i, x)\}. \tag{2}$$

例えば、 $p(i, x)$ を条件 " $0 \leq x \leq i$ " とすると、上記(1), (2) はどのような集合になるか。

A, B を2つの集合とするとき、その直積 $A \times B$ とは、 A の元と B の元の組全体からなる集合である：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

一般に、 A_1, A_2, \dots, A_n を集合とするとき、

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{k=1}^n A_k$$

と書く。特に $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ のとき

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$$

と書く。

さらに一般に、集合 I の各元 i に対して集合 A_i が定まっているとき、

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, x_i \in A_i\}.$$

次が成立する。

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times B &= \bigcap_{i \in I} (A_i \times B) \\ \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B &= \bigcup_{i \in I} (A_i \times B) \end{aligned}$$

これらを証明するために、一般化された分配法則を用いる。

$$\begin{aligned} (\forall i, p_i) \vee q &= \forall i, (p_i \vee q), \\ (\exists i, p_i) \wedge q &= \exists i, (p_i \wedge q) \end{aligned}$$

もっと一般に、

$$\bigcap_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} A_{i,j} \right) = \prod_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{i,j} \right)$$

が成り立つが、

$$\prod_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} A_{i,j} \right)$$

は一般には成り立たない。

集合 A のべき集合 2^A とは、 A の部分集合全体からなる集合とする。

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}$$

この講義の配布資料すべて、補足説明、小テストの解答、参考文献などは

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~munemasa/teaching/2013risan.html>

からダウンロードできるようにした。