2012年4月16日

前回の小テストの解説

一般に、整数 k に関する条件 $p(k)$ を満たす k の最大値が r とは、

$$p(r) \wedge \overline{p(r+1)} \wedge \overline{p(r+2)} \wedge \cdots$$

すなわち

$$p(r) \wedge \left(\forall k > r,\ \overline{p(k)}\right)$$

と書ける。$p(k)$ として「ある k 次の小行列 B があってその行列式が 0 でない」（その否定は $(\forall B : k$ 次の小行列$,\ \det B = 0)$ となる）という条件をとることで、定理を論理記号を用いて書き表すことができる。

もっとわかりやすい例では、例えば、人手のいる仕事があり、その仕事を完了するには、$r+1$ 人いれば良いとする。$\det B = 0$ を「仕事が終わる」と読み替えることで、この命題は次の命題と同じであることがわかる。

> r 人集まったのでは、メンバーによっては仕事が終わらないこともあり得るが、$r+1$ 人以上いれば必ず仕事が終わる。

ここで、「必ず」が $\forall$ に解釈され、「こともあり得る」が $\exists$ に解釈されていることに注意。

定理 3 の意味は次の通り。代数学の基本定理によれば、複素数を係数とする多項式は複素数の範囲で 1 次式に因数分解される。したがって

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_j)^{m_j}$$

ただし $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ は複素数、$m_1, \ldots, m_j$ は正の整数である。$f(a) = 0 \implies g(a) = 0$ ということは、$g(x)$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ を解に持つということだから、因数定理により $g(x)$ は $x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_j$ で割り切れる。よって

$$g(x) = (x-\alpha_1)^{l_1} \cdots (x-\alpha_j)^{l_j} (x-\beta_1)^{n_1} \cdots (x-\beta_k)^{n_k}$$

という形に書ける。m_i と l_i の大小関係はわからないが、正整数 n を十分大きくとれば（例えば $n = \max\{m_1, \ldots, m_j\}$）、

$$\forall i : 1 \leq i \leq k,\ m_i \leq n l_i$$

が成り立つ。このとき、$f(x) | g(x)^n$ となる。

通常の言葉で書かれた文を論理式に直すことを前回学んだが、論理式に直すことで意味は明解になったとしても、短くはならない。集合の記号を導入すると意味が明解になると同時に短くもなる。

$$(\forall a\text{: 複素数},\ f(a) = 0 \implies g(a) = 0) \implies (\exists n\text{: 正整数},\ f(x) | g(x)^n)$$

を短く書くために、$\mathbb{N}$ を正整数の集合とし、$Z(f)$ を多項式 f で定まる方程式 $f(x)=0$ の複素数解の集合（f の零点という）とすると、

$$Z(f) \subset Z(g) \implies \exists n \in \mathbb{N},\ f|g^n$$

となる（多項式の変数 x も省略している）。実は $\mathbb{C}[x]$ を複素数係数の x の多項式全体の集合とし、

$$\{h \in \mathbb{C}[x] \mid \exists n \in \mathbb{N},\ f|h^n\}$$

を f の radical といい、$\sqrt{(f)}$ で表すことがある。すると

$$Z(f) \subset Z(g) \implies g \in \sqrt{(f)}$$

と書ける。したがって定理３は

$$\{g \in \mathbb{C}[x] \mid Z(f) \subset Z(g)\} \subset \sqrt{(f)}$$

と書ける。

集合論

集合論の教科書でよくある演習問題：$A \cup B = B \iff A \subset B$ は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned}
(A \cup B = B) &= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \iff q(x)\Big) \\
&= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longrightarrow q(x)\Big) \wedge \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longleftarrow q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{\big(p(x) \vee q(x)\big)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big((p(x) \vee q(x)) \vee \overline{q(x)}\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \wedge \Big(p(x) \vee (q(x) \vee \overline{q(x)})\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big(\overline{q(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(p(x) \Longrightarrow q(x)\Big) \\
&= (A \subset B).
\end{aligned}$$

次が成立する。

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i \in I}(A_i \times B)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i \in I}(A_i \times B)$$

これらを証明するために、一般化された分配法則を用いる。

$$
\begin{aligned}
p \vee (\forall i,\ q_i) &= \forall i,\ (p \vee q_i), && (3)\\
p \wedge (\exists i,\ q_i) &= \exists i,\ (p \wedge q_i) && (4)
\end{aligned}
$$

実際、

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \wedge (y \in B)\\
&\iff (\forall i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B)\\
&\iff \forall i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) && ((3)\ より)\\
&\iff \forall i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B\\
&\iff (x,y) \in \bigcap_{i\in I}(A_i \times B),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge (y \in B)\\
&\iff (\exists i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B)\\
&\iff \exists i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) && ((4)\ より)\\
&\iff \exists i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B\\
&\iff (x,y) \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times B),
\end{aligned}
$$

もっと一般に、

$$
\bigcap_{i\in I}\left(\prod_{j\in J} A_{i,j}\right) = \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right)
$$

が成り立つ。実際、

$$
\begin{aligned}
(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right) &\iff \forall j \in J,\ x_j \in \bigcap_{i\in I} A_{i,j}\\
&\iff \forall j \in J,\ (\forall i \in I,\ x_j \in A_{i,j})\\
&\iff \forall (i,j) \in I \times J,\ x_j \in A_{i,j}\\
&\iff \forall i \in I,\ (\forall j \in J,\ x_j \in A_{i,j})\\
&\iff \forall i \in I,\ (x_j)_{j\in J} \in \prod_{i\in I} A_{i,j}\\
&\iff (x_j)_{j\in J} \in \bigcap_{i\in I}\Big(\prod_{i\in I} A_{i,j}\Big).
\end{aligned}
$$

集合 A のベキ集合 2^A とは、A の部分集合全体からなる集合とする。

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}$$

例えば、$A = \{1, 2, 3\}$ のとき、

$$2^A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

である。$\{1, 2\} \subset A$, $\{1, 2\} \in 2^A$, $\{\{1, 2\}\} \subset 2^A$, $\{\{1\}, \{2\}\} \subset 2^A$ は真であるが$\{1, 2\} \subset 2^A$ は偽である。