2013 年 4 月 16 日配布
2013 年 4 月 23 日提出
2013 年 4 月 30 日返却

$m, n \in \mathbb{N}$ に対して、集合 $A_{m,n}$ を

$$A_{m,n} = \{x \in \mathbb{N} \mid mx \geq n\}$$

により定義する。このとき、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}, \quad \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{m,n}$$

を求めよ。

解答例. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{N} &\implies x \geq 1 \\ &\implies nx \geq n \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N},\ mx \geq n \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N},\ x \in A_{m,n} \\ &\implies x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}. \end{aligned}$$

だから

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{N} \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}. \tag{1}$$

一方、明らかに、

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{N} \supset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}. \tag{2}$$

(1) と (2) より

$$\mathbb{N} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}.$$

よって

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n} = \mathbb{N}.$$

$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{N} &\implies mx, mx+1 \in \mathbb{N} \\
&\implies mx+1 \in \mathbb{N},\ mx < mx+1 \\
&\implies \exists n \in \mathbb{N},\ mx < n \\
&\implies \exists n \in \mathbb{N},\ \overline{mx \geq n} \\
&\implies \exists n \in \mathbb{N},\ x \notin A_{m,n} \\
&\implies \overline{\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_{m,n}} \\
&\implies \overline{x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}} \\
&\implies x \in \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}}
\end{aligned}$$

だから

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{N} \subset \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}}. \tag{3}$$

一方、明らかに、

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{N} \supset \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}}. \tag{4}$$

(3) と (4) より

$$\mathbb{N} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}}.$$

すなわち

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n} = \emptyset.$$

よって

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n} = \emptyset.$$