

2013年4月23日

一般に集合 A, B に対し、 B^A を、

$$B^A = \prod_{a \in A} B$$

と定義し、 B^A の元を A から B への写像という。 B^A の元は $(b_a)_{a \in A}$ と書くが、これは A の各元 a に対して B の元 b_a が定まっている、ということになる。このように書くかわりに、 $b_a = f(a)$ と書いて、 $f: A \rightarrow B$ を A から B への写像というのが普通である。写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 A を f の定義域、 B を f の値域という。

写像の概念は集合の取扱いにおいても重要な役割を演じている。

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$$

は成り立たない。例えば

$$A = \bigcap_{i=1}^2 \bigcup_{j=1}^3 A_{i,j} = (A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup A_{1,3}) \cap (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup A_{2,3})$$

を考えてみる。例えば、 $A_{i,j}$ が

$A_{i,j}$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\bigcup_{j=1}^3 A_{i,j}$
$i=1$	{1}	\mathbb{N}	{3}	\mathbb{N}
$i=2$	\mathbb{N}	{2}	{2,6}	\mathbb{N}
$\bigcap_{i=1}^2 A_{i,j}$	{1}	{2}	\emptyset	$A \neq B$

で表されているとき、 $i=1$ は1行の \cup をとるので \mathbb{N} 、 $i=2$ は2行の \cup をとるので \mathbb{N} 、これを $i=1,2$ に関して \cap をとって $A = \mathbb{N}$ となる。一方、

$$B = \bigcup_{j=1}^3 \bigcap_{i=1}^2 A_{i,j} = (A_{1,1} \cap A_{2,1}) \cup (A_{1,2} \cap A_{2,2}) \cup (A_{1,3} \cap A_{2,3})$$

とおくと $j=1$ は1列の \cap をとるので {1}、 $j=2$ は2列の \cap をとるので {2}、 $j=3$ は3列の \cap をとるので \emptyset 、これを $j=1,2,3$ に関して \cup をとって $B = \{1,2\}$ となる。

さて、上の B を一般化して

$$B = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$$

を考えると $x \in B$ は

$$\exists j \in J, (\forall i \in I, x \in A_{i,j})$$

となる。一方、上の A を一般化して

$$A = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$$

を考えると $x \in A$ は

$$\exists j \in J, x \in A_{i,j}$$

を i に関して「かつ」で結んだものになる。しかしこの j は i によって異なっても良いので、 j_i と書くことにすると

$$\forall i \in I, (\exists j_i \in J, x \in A_{i,j_i})$$

となる。 $(j_i)_{i \in I}$ は J^I の元、すなわち I から J への写像と考えることができ、 $f(i) = j_i$ ($j \in J$) と書くことにより

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists f \in J^I, \forall i \in I, x \in A_{i,f(i)} \\ &\iff \exists f \in J^I, x \in \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \iff x \in \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$B = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

となる。

このことは因数分解と展開の関係と比べてみるとわかりやすい。

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22} + a_{23})$$

を展開すると全部で9個の項からなる式になる。これは、 $i = 1$ について $j = 1, 2, 3$ のどれか j_1 を選び、 $i = 2$ についても $j = 1, 2, 3$ についてのどれか j_2 を選んで積 $a_{1,j_1} a_{2,j_2}$ を作っているのだから、展開すると $\{1, 2, 3\}^{\{1, 2\}}$ に対応して項ができる。一般には

$$\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{f \in J^I} \prod_{i=1}^m a_{i,f(i)}$$

となる。ただし $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ である。

積と和、和集合と交わりの役割を入れ替えたらどうなるか考えてみよ。

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_{i,j} = \prod_{f \in J^I} \sum_{i=1}^m a_{i,f(i)},$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f \in J^I} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

は成り立つか？

\mathbb{R}^2 と \mathbb{C} とは自然に対応がある。 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $f(x, y) = x + \sqrt{-1}y$ で定義すると、 xy 平面と複素数平面が f によって同一視される。同一視されるとはどういう意味か。これを説明するために

- $f: A \rightarrow B$ が全射とは $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$.
- $f: A \rightarrow B$ が単射とは $\forall a \in A, \forall a' \in A, (f(a) = f(a') \implies a = a')$.
- $f: A \rightarrow B$ が全単射とは f が全射かつ単射のときをいう。

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f(x, y) = x + \sqrt{-1}y$ は全単射。

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ が $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ により定義できる。

- $g \circ f$ が単射ならば f は単射。
- $g \circ f$ が全射ならば g は全射。

$X \subset A, f: A \rightarrow B$ とするとき、

$$\bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$$

を $\{f(x) \mid x \in X\}$ または $f(X)$ と書き、 f による X の像という。したがって

$$b \in f(X) \iff \exists x \in X, b = f(x).$$

一般に、 $p(x)$ が x に関する条件のとき、 $\{f(x) \mid p(x)\}$ という集合が定義できる。 y がこの集合に属するかどうかは、

$$\exists x : p(x), y = f(x)$$

という y に関する条件が満たされるかどうかで決まるからである。この記法は、集合を定義するときに便利である。例えば、自然数の平方数全体は

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x = y^2\}$$

これをもっと簡単に、

$$\{y^2 \mid y \in \mathbb{N}\}$$

と書くことができる。

また、 $Y \subset B$ に対し、 $f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A, f(a) \in Y\}$ を f による Y の逆像という。

- $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$,
- $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$,
- $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$,
- $X \subset f^{-1}(f(X))$,
- $Y \cap f(A) = f(f^{-1}(Y))$.

恒等写像 $\text{id}_A : A \rightarrow A$ とは、 $\forall a \in A, \text{id}_A(a) = a$ を満たす写像。 $f : A \rightarrow B$ に対して、 $g \circ f = \text{id}_A$ かつ $f \circ g = \text{id}_B$ を満たす $g : B \rightarrow A$ を f の逆写像といい、 $g = f^{-1}$ と書く。 f が逆写像をもつとき、 $Y \subset B$ に対して $f^{-1}(Y)$ は2通りに定義されていることに注意。実は2つの定義は同じになる。

f が逆写像をもたなくても、 f の値域の部分集合 Y に対して、 $f^{-1}(Y)$ は上に定義された逆像として意味を持つので、 f の値域の元 b に対して $f^{-1}(\{b\})$ は

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{b\}) &= \{a \mid a \in A, f(a) \in \{b\}\} \\ &= \{a \mid a \in A, f(a) = b\} \end{aligned}$$

さらに、 f が逆写像を持つときは

$$\begin{aligned} &= \{a \mid a \in A, a = f^{-1}(b)\} \\ &= \{f^{-1}(b)\} \end{aligned}$$

となる。

f が逆写像を持たないときは、 $f^{-1}(b)$ が定義できないので、 $f^{-1}(b)$ と書くことは誤りである。