2013 年 4 月 23 日配布
2013 年 4 月 30 日提出
2013 年 5 月 7 日返却

1. $f : A \to B$ を写像、J を集合とし、$Y_j \subset B$ $(j \in J)$ とするとき、

$$f^{-1}\big(\bigcap_{j \in J} Y_j\big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\big(\bigcap_{j \in J} Y_j\big) &\iff \boxed{f(a) \in \bigcap_{j \in J} Y_j} \\ &\iff \boxed{\forall j \in J,\ f(a) \in Y_j} \\ &\iff \boxed{\forall j \in J,\ a \in f^{-1}(Y_j)} \\ &\iff a \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j). \end{aligned}$$

2. $f : A \to B$ を写像とし、$Y \subset B$ とするとき、

$$f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(B - Y) &\iff a \in A,\ \boxed{f(a) \in B - Y} \\ &\iff \boxed{a \in A,\ f(a) \notin Y} \\ &\iff \boxed{a \in A,\ a \notin f^{-1}(Y)} \\ &\iff a \in A - f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

3. $f : A \to B$, $X \subset A$ とするとき、$X \subset f^{-1}(f(X))$ を証明せよ。また、f が単射ならば $X = f^{-1}(f(X))$ となることを証明せよ。

$a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} a \in X &\implies a \in A,\ f(a) \in f(X) \\ &\implies a \in f^{-1}(f(X)) \end{aligned}$$

となるので $X \subset f^{-1}(f(X))$ である。

さらに、f が単射とすると、

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(f(X)) &\implies f(a) \in f(X) \\ &\implies \exists b \in X,\ f(a) = f(b) \\ &\implies \exists b \in X,\ a = b \\ &\implies a \in X. \end{aligned}$$

よって $X \supset f^{-1}(f(X))$ も成り立つので $X = f^{-1}(f(X))$.