2013年4月30日

写像 $f: A \to B$ とは、関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一般化したもので、関数と同様にグラフが定義できる。写像 $f: A \to B$ に対して、A を f の定義域といい、

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

を f のグラフという。

写像はそのグラフを定めることによって定めることもできる。写像のグラフ $G \subset A \times B$ は条件

$$\forall a \in A,\ G \cap (\{a\} \times B) \text{ はちょうどひとつの元からなる} \tag{1}$$

を満たし、逆にこの条件を満たす $G \subset A \times B$ はある写像のグラフである。上の条件 (1) を略記するために、$\exists!$ という記号を用いる：

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ (a, b) \in G. \tag{2}$$

有限集合とは、

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists f: \{1, 2, \ldots, n\} \to X,\ f \text{ は全単射}$$

を満たす集合 X のこと。このような n を $|X|$ で表す。これを否定したのが無限集合の定義となる。$\mathbb{N}$ は無限。$\mathbb{N}$ を含む集合は無限。

$f: A \to B$ を有限集合 A から B への写像とする。このとき、f が全射ならば $|A| \geq |B|$ であり、f が単射ならば $|A| \leq |B|$ である。特に、f が全単射ならば $|A| = |B|$ である。逆に、$|A| = |B|$ のとき、f が単射または全射ならば全単射である。

有限集合に対して次の等式が成り立つ。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A||B|$
- $|B^A| = |B|^{|A|}$
- $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$ (disjoint と言う)

X, Y を無限集合とするとき、

$$\exists f: X \to Y,\ f \text{ は単射}\quad \text{のとき } |X| \leq |Y|, \tag{3}$$

$$\exists f: X \to Y,\ f \text{ は全単射}\quad \text{のとき } |X| = |Y|, \tag{4}$$

$$|X| \leq |Y| \text{ だが } |X| = |Y| \text{ ではないとき } |X| < |Y| \tag{5}$$

と書く。無限集合 X, Y について $|X|, |Y|$ は現段階では定義されていないことに注意。上は「$|X| \leq |Y|$」「$|X| = |Y|$」「$|X| < |Y|$」の定義をしているに過ぎない。したがって、無限集合 $|X|, |Y|$ について、

$$|X| \leq |Y| \text{ かつ } |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$$

は自明ではない。(3)–(5) は X, Y が有限集合のときも成り立つ。

「$|X| \geq |Y|$」「$|X| > |Y|$」はそれぞれ「$|Y| \leq |Y|$」「$|Y| < |X|$」として定義する。

- シュレーダー・ベルンシュタインの定理：$|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$.
- カントールの定理：$|X| < |2^X|$.

これらは X, Y が有限集合のときは明らかに成り立つ。無限集合のとき、シュレーダー・ベルンシュタインの定理の証明はやや難しい。カントールの定理の証明は簡単である。

実際、$f : X \to 2^X$ を $f(x) = \{x\}$ $(x \in X)$ と定義すれば明らかに単射なので、$|X| \leq |2^X|$ が成り立つ。もし $|X| < |2^X|$ でないとすると $|X| = |2^X|$ でなければならず、したがって全単射 $h : X \to 2^X$ が存在する。

$$A = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}$$

とおくと $A \in 2^X$ であり、h は特に全射であるから、ある $a \in X$ が存在して $h(a) = A$ となる。すなわち

$$h(a) = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}$$

すると

$$a \in h(a) \iff a \notin h(a)$$

となって矛盾する。

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ集合 X から Y, Y から Z への写像とする。f, g がともに全射であれば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射、f, g がともに単射であれば $g \circ f$ も単射となる。特に

- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z| \implies |X| \leq |Z|$

$S \subset A \times B$ のとき、

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{a \in A} |\{b \mid b \in B,\ (a, b) \in S\}| \\ &= \sum_{b \in B} |\{a \mid a \in A,\ (a, b) \in S\}| \end{aligned}$$

この方法を double counting という。例えば、A を正二十面体の面の集合、B を正二十面体の頂点の集合、とし、$S \subset A \times B$ を、$a \ni b$ を満たす組 (a, b) 全体とする。各面は正三角形なので、$|S| = 3|A| = 60$ である。一方、各頂点には 5 つの正三角形が集まっているので、$|S| = 5|B|$ である。よって $|B| = 12$ となる。

A, B を有限集合とし、$|A| = k$, $|B| = n$ とする。A から B への単射全体の集合を X とすると、

$$|X| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

となる。これは n 個から k 個とる順列のことである。特に、$k = n$ のとき、単射は必ず全単射となり、その個数は $n!$ となる。一般に有限集合 A から A への全単射を置換という。

k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とするとき、

$$\binom{B}{k} = \{Y \mid Y \subset B,\ |Y| = k\}.$$

と定義し、B choose k と読む。$|B|=n$ のとき

$$\left|\binom{B}{k}\right| = \binom{n}{k}$$

と書き、これも n choose k と読む。これを二項係数という。

$|A| = k \leq n = |B|$ とし、

$$S = \{(f, Y) \mid f : A \to B \text{ 単射},\ f(A) = Y\}$$

とおいて S に double counting を適用すると

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{f:A\to B \text{ 単射}} |\{Y \mid f(A) = Y\}| \\
&= \sum_{f:A\to B \text{ 単射}} 1 \\
&= |\{f : A \to B \text{ 単射 }\}| \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+1), \\
S &= \sum_{Y\in\binom{B}{k}} |\{f : A \to B \text{ 単射 } | f(A) = Y\}| \\
&= \sum_{Y\in\binom{B}{k}} |\{f : A \to Y \text{ 全単射 }\}| \\
&= \sum_{Y\in\binom{B}{k}} k! \\
&= k!\left|\binom{B}{k}\right|
\end{aligned}$$

となるので、

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{B}{k}\right| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$