

2013年4月30日配布
2013年5月7日提出
2013年5月14日返却

1. r を正の整数とし、 A_1, \dots, A_r を有限集合 X の部分集合とする。不等式

$$\left| \bigcup_{i=1}^r A_i \right| \leq \sum_{i=1}^r |A_i|.$$

を r に関する帰納法により示せ。また、等号が成立するための必要十分条件を記述せよ。ただし、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1)$$

は自由に用いて良い。

$r = 1$ のときは自明。 $r \geq 2$ として、 $r - 1$ で正しいとすると

$$\left| \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right| \leq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i|. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^r A_i \right| &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cup A_r \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right| + |A_r| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cap A_r \right| \quad ((1) \text{ より}) \\ &\leq \left| \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right| + |A_r| \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| + |A_r| \quad ((2) \text{ より}) \quad (4) \\ &= \sum_{i=1}^r |A_i|. \end{aligned}$$

次に、等号成立の必要十分条件は

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \quad (5)$$

であることを帰納法により示す。 $r = 1$ のときは等号は常に成り立ち、(5) は仮定が F なので常に T である。

$r - 1$ のときに正しいと仮定する、すなわち、

$$\left| \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| \iff (\forall i, j \in \{1, \dots, r-1\}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset) \quad (6)$$

と仮定する。すると、

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^r A_i \right| = \sum_{i=1}^r |A_i| &\iff (3) \text{ と } (4) \text{ で等号成立} \\ &\iff \left| \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cap A_r \right| = 0 \text{ かつ } \left| \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| \end{aligned} \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \left| \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cap A_r \right| = 0 &\iff \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i \right) \cap A_r = \emptyset \\ &\iff \bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \cap A_r) = \emptyset \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, r-1\}, A_i \cap A_r = \emptyset \end{aligned} \quad (8)$$

(7) に (6), (8) を代入して

$$\left| \bigcup_{i=1}^r A_i \right| = \sum_{i=1}^r |A_i| \iff (\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)$$

を得る。