2013年5月7日

X を n 人からなる集合とし、X に属するどの２人についても、彼らが互いに知人であるかそうでないか明確に定まっているとする。$n \geq 6$ のとき、次のいずれかが成り立つ。

(1) X の中に、互いに知人どうしの３人が存在する。

(2) X の中に、互いに知人でない３人が存在する。

この問題を記号で表すと、

$$A = \{Y \in \tbinom{X}{3} \mid (\forall x \in Y,\ \forall y \in Y, (x \neq y \implies x \text{ と } y \text{ は知人}))\},$$
$$A' = \{Y \in \tbinom{X}{3} \mid (\forall x \in Y,\ \forall y \in Y, (x \neq y \implies x \text{ と } y \text{ は知人でない}))\}$$

とおき、

$$A \cup A' \neq \emptyset$$

を示すことと同値である。言い換えると、$A \cup A'$ の補集合を

$$G = \{Y \in \tbinom{X}{3} \mid Y \notin A \cup A'\}$$

とおいたとき

$$|G| < \binom{n}{3}$$

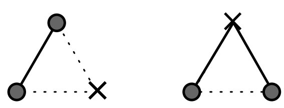
を示すことと同値である。そのために

$$\begin{aligned} S = \{&(x, Y) \in X \times G \mid x \in Y, \\ &Y - \{x\} \text{ は } x \text{ の知人と } x \text{ の知人でない人からなる}\} \subset X \times G \end{aligned}$$

の元の個数を２通りに数える。ここで、２通りに数えるというのは、double counting

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{x \in X} |\{Y \in G \mid (x, Y) \in S\}| \\ &= \sum_{Y \in G} |\{x \in X \mid (x, Y) \in S\}| \end{aligned}$$

を使うということである。



$$
\begin{aligned}
2|G| &= \sum_{Y \in G} 2 \\
&= \sum_{Y \in G} |\{x \in Y \mid \overset{\alpha(Y-\{x\},x)}{\boxed{Y - \{x\} \text{ は } x \text{ の知人と } x \text{ の知人でない人からなる}}}\}| \\
&= |\{(x, Y) \in X \times G \mid x \in Y,\ \alpha(Y - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{Y \in G \mid x \in Y,\ \alpha(Y - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{Y \in \tbinom{X}{3} \mid x \in Y,\ \alpha(Y - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{P \in \tbinom{X-\{x\}}{2} \mid \alpha(P, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{x \text{ の知人 }\} \times \{x \text{ と知人でない人 }\}| \\
&= \sum_{x \in X} r_x(n - 1 - r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} (r_x^2 - (n-1) r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} \left((r_x - \tfrac{n-1}{2})^2 - \tfrac{(n-1)^2}{4} \right) \\
&\leq \begin{cases} n\frac{(n-1)^2}{4} & n : \text{奇数} \\ n\frac{n(n-2)}{4} & n : \text{偶数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし、$r_x = |\{x \text{ の知人 }\}|$ とおいた。特に、$n = 6$ のとき、

$$
|G| \leq 6 \frac{6^2 - 2 \cdot 6}{8} = 18 < 20 = \binom{6}{3}
$$

$n = 5$ のとき、$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ として、$(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_1)$ が知人で、その他は知人でないとすると、

(1) X の中に、互いに知人どうしの 3 人は存在しない。

(2) X の中に、互いに知人でない 3 人は存在しない。

このような問題を定式化するために、「関係」という概念を導入する。X を集合とし、$X \times X$ の部分集合を X の上の関係という。

関係を図で表したものがグラフ（または、関係そのものをグラフということもある)。

知人であるかどうかは、$R \subset \binom{X}{2}$ で記述することもできる（知人であるかどうかが一方通行の場合は $R \subset X^2$ を考える必要がある)。

以下の３つの条件を満たす関係 $R \subset X \times X$ を X 上の同値関係という。

反射律 $\forall a \in X,\ (a,a) \in R$

対称律 $\forall a,b \in X,\ (a,b) \in R \implies (b,a) \in R$

推移律 $\forall a,b,c \in X,\ (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \implies (a,c) \in R$

$(a,b) \in R$ のとき、$a \sim b$ などと書くこともある。

同値関係の例：通常の等号、元の個数が同じ集合、図形の合同、図形の相似、整数の合同。

$R \subset X \times X$ を X 上の関係で、反射律、対称律をみたすとする。このとき、$R \subset \tilde{R} \subset X \times X$ なる関係 $\tilde{R}$ で推移律をみたす最小の $\tilde{R}$ を、R の推移閉包 (transitive closure) とよぶ。すなわち

$$\tilde{R} = \{(a,b) \in X \times X \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in X,\ (a,a_1),(a_1,a_2),\ldots,(a_n,b) \in R\} \\ \cup R.$$

反射律、推移律に加えて以下の条件を満たす関係 $R \subset X \times X$ を X 上の順序関係といい、(X,R) を半順序集合という。

反対称律 $\forall a,b \in X,\ (a,b) \in R,\ (b,a) \in R \implies a = b$

$(a,b) \in R$ のとき、$a \preceq b$ などと書くこともある。

順序関係の例：通常の不等式、元の個数の大小、集合の包含、部分列、自然数の整除。

さらに、

$$\forall a,b \in X,\ ((a,b) \in R \text{ or } (b,a) \in R)$$

が成り立つとき、(X,R) を全順序集合という。

$R \subset X \times X$ を同値関係とし、$x \in X$ とするとき、

$$[x] = \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$$

を、（関係 R に関する、）x を含む同値類という。同値類全体の集合

$$\{[x] \mid x \in X\}$$

を関係 R による商集合といい、X/R と書く。$\pi : X \to X/R,\ \pi(x) = [x]$ を自然な写像という。

m を正の整数とし、$\mathbb{Z}$ の関係 R を

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m|(a-b)\}$$

とおき、$(a,b) \in R$ のとき $a \equiv b \pmod{m}$ と書く。これは同値関係になる。

$X = \mathbb{N}^2$ とおき、

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in X \times X \mid a+d = b+c\}$$

とおくと、R は X 上の同値関係になる。