

2013年5月7日配布
2013年5月14日提出
2013年5月21日返却

1. \mathbb{Z} 上の以下の関係 R が次の性質を持つかどうか決定せよ。

R	反射律	対称律	推移律
$\{(a, b) \mid a \geq b\}$	○	×	○
$\{(a, b) \mid a - b \text{ は偶数}\}$	○	○	○
$\{(a, b) \mid ab \text{ は偶数}\}$	×	○	×
$\{(a, b) \mid \exists m \in \mathbb{Z}, am = b\}$	○	×	○
$\{(a, b) \mid ab = 1\}$	×	○	○
$\{(a, b) \mid \sqrt{ab} \text{ は整数}\}$	○	○	×

2.

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{(a, b), (c, d) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 R は X 上の同値関係になることを示せ。

$(a, b) \in X$ とすると、 $ab = ba$ より $((a, b), (a, b)) \in R$, よって反射律が成り立つ。

$((a, b), (c, d)) \in R$ とすると $ad = bc$ より $cb = da$ だから $((c, d), (a, b)) \in R$, よって対称律が成り立つ。

$((a, b), (c, d)) \in R, ((c, d), (e, f)) \in R$ とすると $ad = bc, cf = de$ だから

$$\begin{aligned}(ad)f &= (bc)f \\ &= b(cf) \\ &= b(de)\end{aligned}$$

となる。 $(c, d) \in X$ より $d \neq 0$ であるから、 $af = be$ を得るので、 $((a, b), (e, f)) \in R$, よって推移律が成り立つ。