

2014年5月14日

以下の3つの条件を満たす関係  $R \subset X \times X$  を  $X$  上の順序関係という。

反射律  $\forall a \in X, (a, a) \in R$

反対称律  $\forall a, b \in X, (a, b) \in R, (b, a) \in R \implies a = b$

推移律  $\forall a, b, c \in X, (a, b) \in R, (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

$(a, b) \in R$  のとき、 $a \leq b, a \preceq b$  などと書くこともある。

$X$  に順序関係が定義されているとき、 $X$  を半順序集合という。順序関係がさらに

$$\forall a, b \in X, (a, b) \in R \text{ or } (b, a) \in R$$

をみたすとき、この関係を全順序といい、 $X$  を全順序集合という。

$X_1, \dots, X_n$  が全順序集合のとき、その直積  $\prod_{i=1}^n X_i$  は「辞書式順序」により全順序集合になる。

次を仮定する。

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x \leq y \implies \{z \mid z \in X, x \leq z, z \leq y\} \text{ は有限})$$

例えば、 $\mathbb{Z}$  における大小関係、 $\mathbb{N}$  における整除など。このような  $(X, R)$  に対し、Möbius 関数  $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{Z}$  を、次を満たす関数として定義する。

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \not\leq y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{if } x < y \end{cases}$$

例えば  $X = \mathbb{N}$  を整除に関して半順序集合とみたとき、 $\mu(1, n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を  $\mu(n)$  と略記し、これを単に Möbius 関数ということもある。例えば、 $\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(6) = 1$  より

$$\mu(12) = -(\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(6)) = 0.$$

再び一般に、 $(X, R)$  を有限な半順序集合とする。ゼータ関数  $\zeta: X \times X \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする。 $\mu, \zeta$  をともに行列と考えて、積を計算すると

$$(\mu\zeta)_{x,y} = \sum_{z \in X} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta_{x,y}$$

従って  $\mu\zeta = \zeta\mu = I$  (単位行列)。

定理 1.  $f, g : X \rightarrow \mathbb{Z}$  が

$$\forall x \in X, g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

を満たすとする

$$\forall x \in X, f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)g(y)$$

が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in X \\ y \leq x}} \mu(y, x)g(y) &= \sum_{\substack{y \in X \\ y \leq x}} \mu(y, x) \sum_{\substack{z \in X \\ z \leq y}} f(z) \\ &= \sum_{y \in X} \mu(y, x) \sum_{z \in X} \zeta(z, y)f(z) \\ &= \sum_{z \in X} \left( \sum_{y \in X} \zeta(z, y)\mu(y, x) \right) f(z) \\ &= \sum_{z \in X} (\zeta\mu)_{z,x} f(z) \\ &= \sum_{z \in X} \delta_{z,x} f(z) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

もっと簡単に、 $g, f$  を行ベクトル、 $\mu, \zeta$  を行列と考えて行列とベクトルの積を用いれば  $\mu\zeta =$  単位行列であることから  $\zeta\mu =$  単位行列となり、したがって  $g = f\zeta \implies f = g\zeta^{-1} = g\mu$ .

$A_i (i \in I)$  を有限集合  $X$  の部分集合とする。  $h : X \rightarrow 2^I, f : 2^I \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\begin{aligned} h(a) &= \{j \mid j \in I, a \notin A_j\}, \\ f(J) &= |h^{-1}(\{J\})| \\ &= |\{a \mid a \in X, J = \{j \mid j \in I, a \notin A_j\}\}| \end{aligned}$$

により定義し、

$$g(J) = \sum_{K \subset J} f(K)$$

とおくと

$$\forall J \in 2^I, g(J) = \begin{cases} \left| \bigcap_{j \in \bar{J}} A_j \right| & \text{if } J \neq I, \\ |X| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned}
g(J) &= \sum_{\substack{K \in 2^I \\ K \subset J}} f(K) \\
&= \left| \bigcup_{\substack{K \in 2^I \\ K \subset J}} \{a \mid a \in X, \{j \in I \mid a \notin A_j\} = K\} \right| && (\text{disjoint だから}) \\
&= \left| \{a \mid a \in X, \{j \in I \mid a \notin A_j\} \subset J\} \right| \\
&= \left| \{a \mid a \in X, \bar{J} \subset \{j \in I \mid a \in A_j\}\} \right| \\
&= \left| \{a \mid a \in X, \forall j \in \bar{J}, a \in A_j\} \right| \\
&= \left| \bigcap_{j \in \bar{J}} A_j \right|.
\end{aligned}$$

ただし、この計算は  $J = I$  のとき注意を要する。 $J = I$  のとき

$$\{a \mid a \in X, \{j \in I \mid a \notin A_j\} \subset J\} = \{a \mid a \in X, \{j \in I \mid a \notin A_j\} \subset I\}$$

で

$$\{j \in I \mid a \notin A_j\} \subset I$$

は常に真だから、

$$\{a \mid a \in X, \{j \in I \mid a \notin A_j\} \subset J\} = X.$$

よって  $g(I) = g(J) = |X|$  となる。

これより次の包除原理を得る：

$$\begin{aligned}
\left| X - \bigcup_{i \in I} A_i \right| &= f(I) = \sum_{J \subset I} (-1)^{|I|-|J|} g(J) \\
&= \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} g(\bar{J}) = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.
\end{aligned}$$

有限集合の単射の数は順列の数として計算可能であったが、全射の数は複雑である。 $|A| = m \geq |B| = n$  とし、 $F_b = \{h \mid h : A \rightarrow B, b \notin h(A)\}$  とおく。すると

$$\begin{aligned}
|\{h \mid h : A \rightarrow B, h \text{ は全射}\}| &= \left| B^A - \bigcup_{b \in B} F_b \right| \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{C \in \binom{B}{i}} (-1)^i |\{h \mid h : A \rightarrow B, C \cap h(A) = \emptyset\}| \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^m \\
&= n! S(m, n).
\end{aligned}$$

ここで、 $S(m, n)$  は第2種の Stirling 数という。