2014年5月14日

$(a,b) \in R$ のとき、$a \leq b,\ b \geq a,\ a \preceq b,\ a \succeq b$ などと書くこともある。例は大小関係、整除関係、包含関係。

X に順序関係が定義されているとき、X を半順序集合という。順序関係がさらに

$$\forall a, b \in X,\ (a,b) \in R \text{ or } (b,a) \in R$$

をみたすとき、この関係を全順序といい、X を全順序集合という。

$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ における「辞書式順序」とは

$$\begin{aligned} R = &\{((x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n)) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in X\} \\ &\cup \{((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mid (x_1,\ldots,x_n) \neq (y_1,\ldots,y_n), \\ &\quad x_i \leq y_i \text{ where } i = \min\{j \mid 1 \leq j \leq n,\ x_j \neq y_j\}\}. \end{aligned}$$

Möbius 関数の定義は帰納的定義を拡大解釈している。

集合の包含関係の場合、$A \subset B$ に対して $\mu(A,B) = (-1)^{|A|-|B|}$ となることが $|A|-|B|$ に関する帰納法によって示せる。

ζ は $X = \{1,\ldots,n\}$ のとき上半三角行列。

$$F(J) = \{a \mid a \in X,\ J = \{j \mid j \in I,\ a \notin A_j\}\}$$

とおくと $f(J) = |F(J)|$ であり、$F(K)\ (K \subset J)$ は disjoint だから

$$|\bigcup_{K \subset J} F(K)| = \sum_{K \subset J} |F(K)|.$$

$$\left| B^A - \bigcup_{b \in B} F_b \right| = \sum_{C \subset B} |\bigcap_{b \in C} F_b|.$$