

2013年5月21日

$R \subset X \times X$  を同値関係とし、 $x \in X$  とするとき、

$$[x] = \{y \mid y \in X, (x, y) \in R\}$$

を、(関係  $R$  に関する)  $x$  を含む同値類という。同値類全体の集合  $\{[x] \mid x \in X\}$  を関係  $R$  による商集合といい、 $X/R$  と書く。 $R$  は同値関係なので、

$$(x, y) \in R \iff [x] = [y] \iff x \in [y] \iff y \in [x] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

## $\mathbb{Z}$ の構成

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

とし、 $\mathbb{N}_0^2 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  上の関係  $R$  を次で定める。

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{N}_0^2)^2 \mid a + d = b + c\}$$

すると  $R$  は同値関係になる。 $R$  による商集合

$$\mathbb{N}_0^2/R = \{[a, b] \mid (a, b) \in \mathbb{N}_0^2\}$$

から  $\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を

$$f([a, b]) = a - b$$

によって定める。 $f$  の定義は見かけ上同値類  $[a, b]$  の代表元  $(a, b)$  の取り方に依存しているように見えるので、 $[a, b] = [a', b']$  のとき  $f([a, b]) = f([a', b'])$  が示されないと  $f$  は写像になっていると言えない。実際、

$$[a, b] = [a', b'] \implies ((a, b), (a', b')) \in R \implies a + b' = b + a' \implies a - b = a' - b'$$

なので、 $f([a, b]) = f([a', b'])$  が成り立つ。

このように、商集合を定義域とする写像の定義が見かけ上同値類の代表元の取り方に依存しているとき、その写像の値が実際には同値類の代表元の取り方に依存しないことを示すことを、「写像が well-defined である」ことを示す、という。上の写像  $f$  は全単射でもある。

集合  $X$  における二項演算 (binary operation) とは、 $X \times X$  から  $X$  への写像のことである。例えば、 $\mathbb{N}_0^2/R$  に演算  $+$  を次のように定義することができる。

$$+ : (\mathbb{N}_0^2/R) \times (\mathbb{N}_0^2/R) \rightarrow \mathbb{N}_0^2/R, +([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d].$$

以後  $+([a, b], [c, d])$  を  $[a, b] + [c, d]$  と書くことにする。この写像  $+$  は well-defined である。実際、

$$\begin{array}{r} a + b' = a' + b \\ +) c + d' = c' + d \\ \hline (a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d) \end{array}$$

だから

$$[a, b] = [a', b'], [c, d] = [c', d'] \implies [a + c, b + d] = [a' + c', b' + d'].$$

さらに、

$$f([a, b] + [c, d]) = f([a, b]) + f([c, d])$$

が成り立つ。ただし、右辺における  $+$  は  $\mathbb{Z}$  における通常の和である。

## ℚ の構成

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 $R$  は  $X$  上の同値関係になる。 $R$  による商集合

$$X/R = \{[a, b] \mid (a, b) \in X\}$$

から  $\mathbb{Q}$  への写像  $f$  を

$$f([a, b]) = \frac{a}{b}$$

によって定める。 $f$  は well-defined であることがわかり、また  $f$  は全単射でもある。

## $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の構成

$m$  を正の整数とし、 $a \in \mathbb{Z}$  が  $m$  で割り切れるとき  $m|a$  と書く。

$$R = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, m|(a - b)\}$$

とおくと、 $R$  は  $\mathbb{Z}$  上の同値関係になる。 $R$  による商集合

$$\mathbb{Z}/R = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

を  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  とも書く。 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に演算  $+$  を次のように定義することができる。

$$+ : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +([a], [b]) = [a + b].$$

この写像  $+$  は well-defined である。また、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に演算  $\times$  を次のように定義することができる。

$$\times : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \times([a], [b]) = [ab].$$

この写像  $\times$  は well-defined である。