

2013年6月11日

$A = \mathbb{R}[x]$  のイデアル

$$I = (x^2 + 1) = \{f(x)(x^2 + 1) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

に対して

$$A/I = \{[f(x)] \mid f(x) \in A\} \quad (1)$$

$$= \{[a + bx] \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

のように、一見、(1) より (2) の方が小さく見えるが、実際は同じである。それは同値類の代表のみを考えても十分だからである。

このことは次のように理解すればよい。 $A$  を日本人全体の集合とし、 $A$  に同値関係  $R$  を「出身県が同じ」として定義する。同値類の集合  $A/R$  は

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\} \quad (3)$$

$$= \{[b] \mid b \text{ は国会議員}\} \quad (4)$$

のように、一見 (3) より小さく見える (4) でも実際は同じである。ただし、国会議員は所属選挙区の出身者であると仮定し、したがってどの県からも少なくとも一人は県出身の国会議員がいるとしておく。