2013年6月18日配布
2013年7月2日提出
2013年7月9日返却

多項式

$$a = x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 5,\ b = x^2 + 5x + 5 \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$$

に対して、$sa + tb = 1$ となる $s, t \in (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$ を求めよ。

$$\begin{aligned} r_0 &= a = x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 5, \\ r_1 &= b = x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_2 + r_2, \\ q_2 &= x^2 + 6x + 1, \\ r_2 &= 2x, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ q_3 &= 4x + 6, \\ r_3 &= 5 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot 5 \\ &= 3r_3 \\ &= 3(r_1 - r_2 q_3) \\ &= 3(r_1 - (r_0 - r_1 q_2) q_3) \\ &= 3(b - (a - b q_2) q_3) \\ &= 4 q_3 a + 3(1 + q_2 q_3) b \\ &= 4(4x + 6)a + 3(1 + (x^2 + 6x + 1)(4x + 6))b \\ &= (2x + 3)a + (5x^3 + 6x^2 + x)b \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} s &= 2x + 3, \\ t &= 5x^3 + 6x^2 + x. \end{aligned}$$