2013年7月16日

n を正整数とするとき、正整数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ が n の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(1) $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$,

(2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$.

$p(n)$ で n の分割の総数を表すと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)^{-1}.$$

ただし、$p(0)=1$ とする。すると、$p(n)$ の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^{n} q_m p(n-m) = 0.$$

$$E_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mid \lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n,\ k \text{ は偶数}\},$$

$$O_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mid \lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n,\ k \text{ は奇数}\}$$

とおくと

$$q_n = |E_n| - |O_n|.$$

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in E_n \cup O_n$ に対して、

$$\begin{aligned} s(\lambda) &= \lambda_k, \\ t(\lambda) &= \max\{t \mid \forall i : 1 \leq i \leq t,\ \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\} \end{aligned}$$

と定義し、$\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_l^*)$ を次で定義する。$s(\lambda) \leq t(\lambda)$ のとき

$$\begin{aligned} l &= k-1, \\ \lambda_i^* &= \begin{cases} \lambda_i + 1 & (1 \leq i \leq s(\lambda)), \\ \lambda_i & (s(\lambda) < i \leq k-1) \end{cases} \end{aligned}$$

$s(\lambda) > t(\lambda)$ のとき

$$\begin{aligned} l &= k+1, \\ \lambda_i^* &= \begin{cases} \lambda_i - 1 & (1 \leq i \leq t(\lambda)), \\ \lambda_i & (t(\lambda) < i \leq k), \\ t(\lambda) & i = k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$s(\lambda)$ は底辺の長さ、$t(\lambda)$ は右上角から左下に向かって階段状に行ける長さ。

(A) $s(\lambda) \le t(\lambda)$ のとき、$s(\lambda)$ を取り去って $t(\lambda)$ の右にくっつける。すると k が 1 減る。

(B) $s(\lambda) > t(\lambda)$ のとき、$t(\lambda)$ を削って $s(\lambda)$ の下にくっつける。すると k が 1 増える。

いずれにしても k の偶奇が変わる。

例えば、

$$\begin{aligned} \lambda &= (10,9,8,5,3) \in O_{35}, \\ s(\lambda) &= 3 \le 3 = t(\lambda), \\ \lambda^* &= (11,10,9,5) \in E_{35}, \\ s(\lambda^*) &= 5 > 3 = t(\lambda^*), \\ (\lambda^*)^* &= (10,9,8,5,3) \in O_{35}. \end{aligned}$$

$n=6$ のとき $E_6 = \{(5,1),(4,2)\}, O_6 = \{(6),(5,3,1)\}$ であり、(A) により $(5,1)$ が (6) に、$(4,2)$ が $(5,3,1)$ になる。(B) により (6) が $(5,1)$ に、$(5,3,1)$ が $(4,2)$ になる。これで、E_n と O_n が常に一対一に対応しているように見える。

しかし $n=7$ のとき $(4,3)$ においては $s(\lambda) = 3 > 2 = t(\lambda)$ だが (B) を施すことができない。一般に

$$\underbrace{(2k, 2k-1, \ldots, k+1)}_{k}$$

のとき、$s(\lambda) = k+1 > k = t(\lambda)$ だが (B) を施すことができない。

$$\underbrace{(2k-1, 2k-2, \ldots, k)}_{k}$$

のとき、$s(\lambda) = k \le k = t(\lambda)$ だが (A) を施すことができない。

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\frac{1}{2}k(3k-1)$	1	5	12	22	$\cdots$
$\frac{1}{2}k(3k+1)$	2	7	15	26	$\cdots$

$$E'_n = \begin{cases} E_n - \{(2k-1,\ldots,k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1),\ k \text{ は偶数}), \\ E_n - \{(2k,\ldots,k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1),\ k \text{ は偶数}), \\ E_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$O'_n = \begin{cases} O_n - \{(2k-1,\ldots,k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1),\ k \text{ は奇数}), \\ O_n - \{(2k,\ldots,k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1),\ k \text{ は奇数}), \\ O_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと、$\lambda \mapsto \lambda^*$ は全単射 $E'_n \to O'_n$ を与える。特に $|E'_n| = |O'_n|$ となるので

$$q_n = |E_n| - |O_n|$$

$$
= \begin{cases} |E'_n| + 1 - |O'_n| & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1),\ k \text{ は偶数}), \\ |E'_n| - (|O'_n| + 1) & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1),\ k \text{ は奇数}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} (-1)^k & (n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}
$$

例えば、

$$
(q_0, q_1, \ldots, q_{10}) = (1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
p(10) &= -\sum_{i=0}^{9} q_{10-i} p(i) = -(-p(9) - p(8) + p(5) + p(3)), \\
p(9) &= -\sum_{i=0}^{8} q_{9-i} p(i) = -(-p(8) - p(7) + p(4) + p(2)), \\
p(8) &= -\sum_{i=0}^{7} q_{8-i} p(i) = -(-p(7) - p(6) + p(3) + p(1)), \\
p(7) &= -\sum_{i=0}^{6} q_{7-i} p(i) = -(-p(6) - p(5) + p(2) + p(0)), \\
p(6) &= -\sum_{i=0}^{5} q_{6-i} p(i) = -(-p(5) - p(4) + p(1)), \\
p(5) &= -\sum_{i=0}^{4} q_{5-i} p(i) = -(-p(4) - p(3) + p(0))
\end{aligned}
$$

ここに $p(0) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ を代入して $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$, $p(9) = 30$, $p(10) = 42$ を得る。