番号 ________________ 名前 ________________

1. 多項式

$$a = x^6 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1, \quad b = x^3 + x + 1 \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$$

に対して、$sa + tb = 1$ となる $s, t \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}
a &= b(x^3 + 4x + 2) + r_1, \\
r_1 &= 3x^2 + 3x + 4, \\
b &= r_1(2x + 3) + r_2, \\
r_2 &= 4x + 4, \\
r_1 &= r_2(2x) + r_3, \\
r_3 &= 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= -r_3 \\
&= 2xr_2 - r_1 \\
&= 2x(b - r_1(2x + 3)) - r_1 \\
&= 2xb - (4x^2 + x + 1)r_1 \\
&= 2xb - (4x^2 + x + 1)(a - b(x^3 + 4x + 2)) \\
&= (2x + (4x^2 + x + 1)(x^3 + 4x + 2))b - (4x^2 + x + 1)a \\
&= (x^2 + 4x + 4)a + (4x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 2)b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= x^2 + 4x + 4, \\
t &= 4x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 2
\end{aligned}$$

2. 正整数 n に対して、集合 Λ_n を次で定義する。

$$\Lambda_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0,\ \sum_{s=1}^{n} \lambda_s = n\}$$

集合 Λ_n 上の関係 R_n, R'_n を次で定義する。

$$R_n = \{(\lambda, \mu) \in \Lambda_n \times \Lambda_n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{s=1}^{i} \lambda_s \leq \sum_{s=1}^{i} \mu_s\},$$

$$R'_n = \{(\lambda, \mu) \in \Lambda_n \times \Lambda_n \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{s=1}^{i} \lambda_s < \sum_{s=1}^{i} \mu_s\} \cup \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda_n\}.$$

(1).

$$\lambda = (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0) \in \Lambda_8,$$
$$\mu = (5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \in \Lambda_8,$$

とするとき、

$$\{\rho \in \Lambda_8 \mid (\lambda, \rho) \in R_8,\ (\rho, \mu) \in R_8\}$$

を求めなさい。

$$\begin{aligned}\{&(5, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0),\\ &(4, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0),\\ &(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0),\\ &(3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0),\\ &(2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)\}\end{aligned}$$

番号 ________________ 名前 ________________

(2). R'_6 は Λ_6 上の順序関係にならないことを示しなさい。

$$\lambda = (3,3,0,0,0,0) \in \Lambda_6,$$
$$\mu = (4,1,1,0,0,0) \in \Lambda_6,$$

とおくと、

$$\sum_{s=1}^{1} \lambda_s = 3 < 4 = \sum_{s=1}^{1} \mu_s$$

だから $(\lambda, \mu) \in R'_6$ である。また、

$$\sum_{s=1}^{2} \mu_s = 5 < 6 = \sum_{s=1}^{2} \lambda_s$$

だから $(\mu, \lambda) \in R'_6$ である。しかし $\lambda \neq \mu$ だから、反対称律が成り立たない。

3.　X を集合とし、R を X 上の順序関係とする。$x, y \in X$ に対して、$(x, y) \in R$ のとき $x \leq y$ と書き、$(x, y) \in R$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書く。Y を X の部分集合とし、Z_i $(i = 1, 2)$ は次をみたす X の部分集合とする。

(1) $Z_i \subset X - Y$,

(2) $\forall x \in Z_i, \{y \in X \mid y < x\} \subset Y$,

(3) $\forall x \in X - Y, \exists z \in Z_i, z \leq x$.

このとき、$Z_1 = Z_2$ となることを示しなさい。

$x \in Z_1$ とする。(2) より

$$\{y \in X \mid y < x\} \subset Y \tag{4}$$

(1) より $x \in X - Y$ だから、(3) より、ある $z \in Z_2$ が存在して

$$z \leq x \notin Y.$$

ここで、 $z < x$ とすると (4) より $z \in Y$ となるが、(1) より $z \in Z_2 \subset X - Y$ だから矛盾である。よって $z < x$ ではない、すなわち $z = x$ となる。特に $x \in Z_2$ となるので $Z_1 \subset Z_2$ が示せた。

同様に $Z_2 \subset Z_1$ も示せるので、$Z_1 = Z_2$ である。