平成 13 年度修士（情報科学）論文・発表要旨

自由境界問題の差分解法と数値実験

西村　真衣子

2002 年 2 月 18 日

1　はじめに

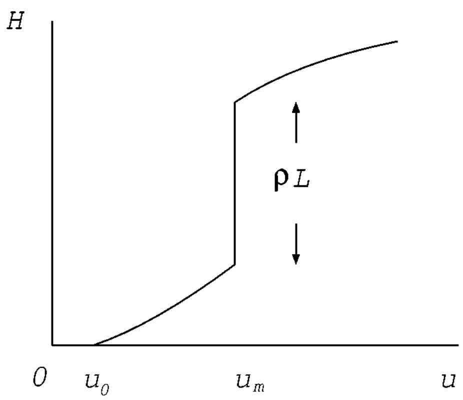
総熱容量を表すエンタルピー関数を用いて水の凍結, 融解の現象を考える．この方法は, 潜熱を熱量の一部と考えるもので, 単相の温度場とすることができ, 解析が容易になる．利点として, 多次元問題や, 複雑な境界面形状を有する場合にも適用できる．ただし, 格子間隔など少し注意をしないと数値解に振動が現れやすくなる．

2　エンタルピー関数

温度変化と相変化に使われる熱量の和を表す**エンタルピー関数** $H(u)$ を用いる．

u を温度, $\rho(u)$ を密度, $c(u)$ を比熱, L を潜熱とし, u_0 を初期温度, u_m を相境界での温度とするとき, $H(u)$ は以下で与えられる:

$$\begin{cases} H(u) = \int_{u_0}^{u} \rho(\theta)c(\theta)d\theta & (u < u_m), \\ H(u) = \int_{u_0}^{u} \rho(\theta)c(\theta)d\theta + \rho(u_m)L & (u > u_m), \\ \int_{u_0}^{u} \rho(\theta)c(\theta)d\theta \leq H(u) \leq \int_{u_0}^{u} \rho(\theta)c(\theta)d\theta + \rho(u_m)L & (u = u_m). \end{cases} \tag{2.1}$$



2 相問題を考える．ここで用いる関係式は, それぞれの相 ($i=1$ では氷, $i=2$ では水) で成り立つ熱伝導方程式

$$\rho(u_i)c(u_i)\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u_i)\frac{\partial u_i}{\partial x}(x,t)\right) \tag{2.2}$$

と, 相境界面上に生じる熱流の差は氷の潜熱に平衡するという物理的性質に基づく条件: $u_1(s(t),t)=u_2(s(t),t)=u_m$ のとき,

$$\left[K(u_i)\frac{\partial u_i}{\partial x}(s(t),t)\right]_{i=1}^{i=2}=-\rho(u_m)L\frac{ds}{dt}(t) \tag{2.3}$$

から成る．$u=u(x,t)$ に対して (2.1) の第 1 式と第 2 式は

$$\frac{\partial H(u)}{\partial t}=\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (u \lessgtr u_m) \tag{2.4}$$

とすることができる．ゆえに, (2.2), (2.4) は, $u=u_m$ を除いて, 一つの方程式

$$\frac{\partial H(u)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2.5}$$

の形で表される．

c_1, c_2, ρ が定数で, $c(u)=c_1$ $(u<0)$, $=c_2$ $(u>0)$, $u_0=u_m=0$ ならば, (2.1) は,

$$\begin{cases} H(u)=\rho c_1 u, & u<0, \\ H(u)=\rho c_2 u+\rho L, & u>0, \\ 0\le H(u)\le \rho L, & u=0 \end{cases} \tag{2.6}$$

となる．もし, (2.5) で, K が u の関数ならば Kirchhoff 変換

$$v=\int_0^u K(\zeta)d\zeta \tag{2.7}$$

を行い,

$$\frac{\partial H(v)}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

とする．ここで, $K(u)=K_1$ $(u<0)$, $=K_2$ $(u>0)$, (K_1, K_2 は定数) とすると,

$$\begin{cases} H(v)=\dfrac{\rho c_1 v}{K_1} & (v<0) \\ H(v)=\dfrac{\rho c_2 v}{K_2}+\rho L & (v>0) \\ 0\le H(v)\le \rho L & (v=0) \end{cases} \tag{2.9}$$

となる．

3　離散化

問題を陽的な差分スキームで離散化する．(2.9) を書きかえると,

$$\begin{cases} v = \dfrac{H(v)}{d_1} & (H(v) < 0), \\ v = \dfrac{(H(v) - L\rho)}{d_2} & (H(v) > \rho L), \\ v = 0 & (0 \le H(v) \le \rho L). \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで, $d_i = \rho c_i / K_i$ とする．

$$\frac{\partial H(v)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.2}$$

境界条件を,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \alpha v & (x = 0), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & (x = \ell) \end{cases} \tag{3.3}$$

とし, 初期条件は,

$$H(v(x,0)) = h_0(x) \tag{3.4}$$

とする．

式 (3.2) を陽的に離散化すると,

$$H_m^{n+1} = H_m^n + \lambda(v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n) \tag{3.5}$$

となる．ここで,

$$\lambda = \Delta t/(\Delta x)^2, \qquad \Delta x = \ell/M, \qquad \Delta t = T/N, \qquad M, N \text{ は正の整数}, T > 0$$

$$H_m^n = H(m\Delta x, n\Delta t), \qquad v_m^n = v(m\Delta x, n\Delta t), \quad 1 \le m \le M-1, \quad 0 \le n \le N,$$

とする．(3.3) から (3.4) までの条件は,

$$v_0^n = v_1^n \frac{(2 - \alpha\Delta x)}{(2 + \alpha\Delta x)}, \qquad v_{M-1}^n = v_M^n, \qquad 0 \le n \le N, \tag{3.6}$$

$$H_m^0 = h_0(m\Delta x), \qquad 0 \le m \le M \tag{3.7}$$

と離散化される．

4　アルゴリズム

v_m^n, H_m^n $(0 \leq m \leq M)$ が既知量ならば,

(i) $H_m^{n+1}(1 \leq m \leq M-1)$ は, (3.5) から計算する.

(ii) $v_m^{n+1}(1 \leq m \leq M-1)$ は (3.1) から H_m^{n+1} の値を用いて導く.

(iii) v_0^{n+1}, v_M^{n+1} は, (3.6) から求める.

5　まとめ

数値実験の結果をアニメーションにすることで, 現象が理解しやすいものとなった. 特に 2 次元のエンタルピー分布によって, 0 度の部分の状態 (自由境界) を見ることができた. 今後は, 3 次元の場合の数値実験を行い, Navier-Stokes 方程式にエンタルピー法を適用させる方法について学びたい.

参考文献

[1] Crank,J.: Free and moving boundary problems. Oxford. 1984.

[2] Casella, E. and Giangi, M.: An analytical and numerical study of the Stefan problem with convection by means of an enthalpy method. Math. Meth. Appl. Sci. **24** 623–639, 2001.