平成14年度修士（情報科学）論文・発表要旨

2次写像の軌道の多様性とカオス的ふるまい

鹿倉さわ穂

2003年2月14日

1　はじめに

17世紀のニュートンによって構築された古典力学の体系は決定論的な微分方程式を基礎におき, 多くの自然現象の解明に本質的な役割を果してきた. しかし, 20世紀に入ると, 気象, 生態系などの研究を通して決定論的な力学系に, 不規則で予測不可能であるようなふるまいが多く見出された. このような現象をカオスという. そして今日では, この複雑さが自然現象の本質であると理解されてきている.

また, カオスはコンピュータの発達により位相的考察や記号力学からの研究が行われている. そこで, 本発表ではこれらの観点から1次元写像におけるカオスを, 2次写像 $Q_c(x) = x^2 + c$ をモデルとして考察する.

2　リターンマップによる軌道の出現

2次写像 $Q_c(x) = x^2 + c$ について考える. 初期値 $x_0 \in R$ としたとき, $x_{n+1} = Q_c(x_n)$ によって得られる点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ を軌道という. 軌道は次のように現われる.

$$\begin{aligned} x_0 \;\to\; &(\text{上または下へ}) \;\to\; y = Q_c(x) \;\to\; (\text{横へ}) \\ &\to y = x \;\to\; (\text{上または下へ}) \;\to\; \cdots \end{aligned}$$

この方法をリターンマップという.

3　カオスの定義

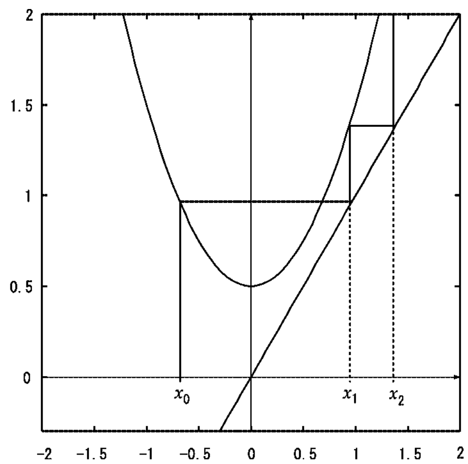
デバネーによるカオスの定義は次のように与えられる.

定義 3.1 (デバネーによるカオス) X を距離空間とする. 次の3条件が成り立つとき, 力学系 $f : X \to X$ はカオス的であるという.

(1) f は初期条件に鋭敏に依存する.

(2) f は位相的に推移的である.

(3) f の周期点は X において稠密である.



(1), (2) は以下のように定義される.

定義 3.2 (初期条件に対しての鋭敏な依存性) 力学系 $f : X \to X$ が初期条件に鋭敏に依存するとは, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ と, x の任意の近傍 N に対して, $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$ となるような $y \in N$ と $k \geq 0$ が存在する.

定義 3.3 (位相的推移性) 力学系 $f : X \to X$ が位相的に推移的であるとは, X の任意の開部分集合の対 U, V $(\neq \phi)$ に対して, $f^k(U) \cap V \neq \phi$ であるような $k > 0$ が存在するときをいう.

4　位相共役でのカオス条件の保存性

デバネーの与えた位相的方法によるカオスの定義に従い, 位相共役でのカオス条件の保存性について考察する.

今, X, Y を距離空間とする. 連続写像 $f : X \to X$ と $g : Y \to Y$ が位相共役であるとは $h \circ f = g \circ h$ であるような同相写像 $h : X \to Y$ が存在することをいう. このとき, 同相写像 h は位相同相写像と呼ばれる. このとき, 次の定理が成り立つ.

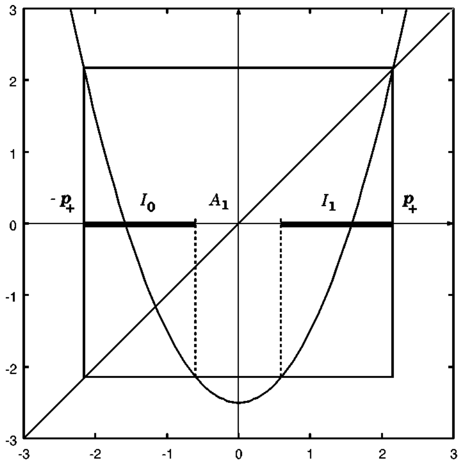
定理 4.1 $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ を連続とし, f, g は位相共役であるとする. このとき, $f : X \to X$ がカオス的ならば, $g : Y \to Y$ もカオス的である.

5　パラメータ $c < -2$ の場合

2 次写像 $Q_c(x) = x^2 + c$ の不動点を $p_\pm$ $(p_+ \geq p_-)$ とし, 閉区間 $I = [-p_+, p_+]$ とする. このとき, 写像を繰り返しても閉区間 I から軌道が出ない初期値の集合を

$$\Lambda = \{x \in I |\ \text{任意の}\ n \in N\ \text{に対して}\ Q_c^n(c) \in I\}$$

とすると, 次の定理が成り立つ.



定理 5.1 $c < -2$ ならば, Λ はカントール集合である.

ここで, Λ に制限したとき, 2 次写像 Q_c がカオス的となることを考える. まずは, $A_1 = \{x \in I \mid Q_c(x) \notin I\}$ とする. このとき, $I - A_1$ によってできる 2 つの閉区間の左側を I_0, 右側を I_1 とする. ここで, $x \in \Lambda$ のとき, 任意の $j = 1, 2, \cdots$ に対して, $Q_c^j(x) \in I_0$ ならば $s_j = 0$, $Q_c^j(x) \in I_1$ ならば $s_j = 1$ とすると, 無限数列 $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ となる. これを x の旅程という. また, この写像が作用する空間を

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 \cdots) \big| \text{任意の } j \in \mathbb{N} \text{ に対して}, \\ s_j = 0 \text{ または } 1\}$$

とし, これを列空間という. さらに, $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ を $\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 \cdots)$ とし, これを推移写像という. これらの準備により, 次の補題が得られる.

補題 5.2 $c < -2$ のとき, $S : \Lambda \to \Sigma$ は同相写像である.

補題 5.3 $x \in \Lambda$ に対して, $S \circ Q_c(x) = \sigma \circ S(x)$ である.

したがって, Σ 上の推移写像 σ と Λ 上の 2 次写像 Q_c は位相共役であることがわかる. また, Σ の点 $\mathbf{s} = (s_0 s_1 \cdots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 \cdots)$ に対して,

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

とおくと, d は Σ 上の距離であることから次の定理が導かれる.

補題 5.4 推移写像 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ はカオス的である.

よって, これと定理 4.1 より次の定理が成り立つ.

定理 5.5 $c < -2$ ならば, 2 次写像 $Q_c(x) = x^2 + c$ は Λ 上でカオス的である.

6 結論

$c < -2$ のとき, Q_c の不動点を $p_\pm$ $(p_+ \geq p_-)$ とすると, 閉区間 $[-p_+, p_+]$ を決して出ない軌道が存在する. そして, この軌道の集合はカントール集合となることがわかった. また, 2次写像 Q_c の軌道を記号力学に結びつけ, カントール集合上の写像との関係を調べると位相共役であることがわかった. さらに, ここで考える記号力学はカオス的であることより, カントール集合における力学系の軌道ははカオス的であることがわかった.

参考文献

[1] Robert L.Devaney, A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Perseus Books, 1992.

[2] J.Banks, J.Brooks, G.Cairns, G.Davis and P.Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, Amer.math.Monthly, vol.99, 332-334, 1992.

[3] Roger.L.Kraft, Chaos, Cantor Sets, and Hyperbolicity for the Logistic Maps, Amer.math.Monthly, vol.106, 400-408, 1999.

[4] 早間 慧 , カオス力学の基礎, 現代数学社 1994.

[5] 鈴木イク雄, カオス入門, コロナ社, 2000.