Privalov 空間と関連する話題について

システム情報数理学 II 分野　　堀　多恵子

2004 年 2 月 12 日

1　はじめに

単位円板 $\mathbf{D}$ 上の正則関数からなる関数空間として，Nevanlinna クラス N，Smirnov クラス N^+，Hardy クラス H^p などがある．これらの空間は 1910〜1920 年代に，Nevanlinna，Smirnov，Hardy，Szegö，Riesz を代表とする数学者たちによって研究され始めた．

このような関数空間の理論は 1970 年代に飛躍的な発展を遂げた．1977 年に Stoll が Smirnov 空間と Hardy 空間の間に位置する Privalov 空間 N^p $(p > 1)$ を新しく導入した．

2　Nevanlinna 空間

$\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$，$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ と置き，σ を $\mathbf{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度とする．

定義 2.1　D 上の正則関数の全体を $H(\mathbf{D})$ で表す．このとき，

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbf{T}} \log^+ \mid f(re^{i\theta}) \mid d\sigma < \infty$$

を満たす関数 $f \in H(\mathbf{D})$ の全体を $N(\mathbf{D})$ で表し，**Nevanlinna 空間**という．

定理 2.2 $f \in N(\mathbf{D})$ $(f \not\equiv 0)$ とすると，$f(e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ が $\mathbf{T}$ 上 $a.e.(\sigma)$ で存在し，$\log f(e^{i\theta}) \in L^1(\sigma)$ である．$f(e^{i\theta})$ を $f(z)$ の**境界関数**という．

定義 2.3

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{\mathbf{T}} \log\bigl(1+ \mid f(re^{i\theta}) \mid\bigr) d\sigma = \int_{\mathbf{T}} \log\bigl(1+ \mid f(e^{i\theta}) \mid\bigr) d\sigma$$

を満たす $f \in N(\mathbf{D})$ の全体を $N^+(\mathbf{D})$ で表し，**Smirnov 空間**という．

定義 2.4　$A \in H(\mathbf{D})$ が，

$$\begin{cases} \mid A(e^{i\theta}) \mid = 1 \quad a.e.(\sigma) \quad on \quad \mathbf{T}, \\ \mid A(z) \mid = 1 \quad on \quad \mathbf{D} \end{cases}$$

を満たすとき，**内関数**という．

定義 2.5 $\mathbf{D}$ 上で，

$$f(z) = C \exp\left(\int_{\mathbf{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \varphi(e^{it}) d\sigma \right) \ , \ z \in \mathbf{D}$$

の形の関数を**外関数**という．ここで，$\varphi \geq 0$，$\log \varphi \in L^1(\sigma)$，$C \in \mathbf{C}$，$|C| = 1$ である．f が外関数なら，$f \in N^+(\mathbf{D})$ である．

定理 2.6　$f \in N^+(\mathbf{D})$ とする．このとき，f が外関数であることの必要十分条件は，f が $N^+(\mathbf{D})$ で可逆なことである．

3　Hardy 空間と Privalov 空間

定義 3.1　$0 < p < \infty$ とする．

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbf{T}} \mid f(re^{i\theta}) \mid^p d\sigma < \infty$$

を満たす $f \in H(\mathbf{D})$ の全体を $H^p(\mathbf{D})$ で表し，**Hardy 空間**という．

定義 3.2 $p > 1$ とする．

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbf{T}} \Bigl\{ \log\bigl(1+ \mid f(re^{i\theta}) \mid\bigr) \Bigr\}^p d\sigma < \infty$$

を満たす $f \in H(\mathbf{D})$ の全体を $N^p(\mathbf{D})$ で表し，**Privalov 空間**という．

命題 3.3 (ｉ)　$H^p(\mathbf{D})\,(1 \leq p)$ はノルム，

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left\{ \int_{\mathbf{T}} |f(re^{i\theta})|^p d\sigma \right\}^{1/p}$$

で，Banach 空間である．

（ⅱ） $H^p(\mathbf{D})\,(0<p<1)$ は距離，

$$\rho(f,g)=\sup_{0<r<1}\int_{\mathbf{T}}\mid f(re^{i\theta})-g(re^{i\theta})\mid^p d\sigma$$

で，完備な線形空間である．

（ⅲ） $N^p(\mathbf{D})\,(p>1)$ は距離，

$$d_p(f,g)=$$

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_{\mathbf{T}}\left\{\log\left(1+|f(re^{i\theta})-g(e^{ri\theta})|\right)d\sigma\right\}^p\right)^{1/p}$$

で，完備な多元環である．

対応 $f(z)\longrightarrow f(e^{i\theta})$ は，$\mathbf{T}$ 上の同様な距離に関して等距離同型なので同一視し，$H^p(\mathbf{D})$，$N^p(\mathbf{D})$ などを単に H^p，N^p などと書く．

命題 3.4（ⅰ） $1<p<q<\infty$，$0<r<s<\infty$ に対して，

$$H^s\subsetneq H^r\subsetneq N^q\subsetneq N^p\subsetneq N^+,$$

（ⅱ） $\displaystyle\bigcup_{r>0}H^r\subsetneq\bigcap_{p>1}N^p,$

（ⅲ） $\displaystyle\bigcup_{p>1}N^p\subsetneq N^+,$

4　N^p 上の外関数

定義 4.1　f が N^p の外関数とは，

$$f(z)=C\exp\left(\int_{\mathbf{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})d\sigma\right)\ ,\ z\in\mathbf{D}$$

の形ので表されることをいう．ここで，$\varphi\geq0$，$\log\varphi\in L^1(\sigma)$，$\underline{\log^+\varphi\in L^p(\sigma)}$，$C\in\mathbf{C}$，$|C|=1$ である．

定理 4.2　$f\in N^p$ とする．f が N^p の外関数であることの必要十分条件は $f_kf\xrightarrow[k\to\infty]{}1$ となる $\{f_k\}\subset N^p$ が存在することである．

定理 4.3　$f\in N^p$ とする．f が N^p の外関数であることの必要十分条件は，$f\in N^p$ から生成される N^p のイデアル fN^p が N^p で稠密なことである．

5　Privalov 空間の不変部分空間

この節では，$N^1=N^+$ とおき，$1\leq p<\infty$ とする．

$$\left(\int_{\mathbf{T}}\left\{\log\left(1+\left|f(e^{i\theta})\right|\right)\right\}^p d\sigma\right)^{1/p}<\infty$$

を満たす $\mathbf{T}$ 上の可測関数の全体を $(\log^+)^p$ で表す．このとき，N^p は $(\log^+)^p$ の閉部分空間である．

定義 5.1　$\mathbf{T}$ 上の可測関数 f が**ユニモジュラー**であるとは，$\mathbf{T}$ 上 $a.e.(\sigma)$ で $\mid f(e^{i\theta})\mid=$ であることをいう．

定義 5.2　M を $(\log^+)^p\,(p>1)$ の閉部分空間とする．M が**不変部分空間**であるとは，$\chi M\subset M$ が成り立つことをいう．特に，$\chi M\subset M$，$\chi M\neq M$ のとき**単純不変部分空間**といい，$\chi M=M$ のとき**重不変部分空間**という．ここで，$\chi(e^{i\theta})=e^{i\theta}$ である．

定理 5.3　(a)　$(\log^+)^p(\mathbf{T})$ のすべての単純不変部分空間 M は，$M=\varphi N^p(\mathbf{T})$ となるようなユニモジュラー関数 φ を含む．

(b)　$(\log^+)^p(\mathbf{T})$ のすべての二重不変部分空間 M には，$M=C_E\left(\log^+\right)^p(\mathbf{T})$ となるような $\mathbf{T}$ の可測部分集合 E が存在する．

系 5.4　M が N^p の閉イデアルなら，$M=AN^p$ なる内関数 A が定数倍を除いて一意に存在する．

参考文献

[1] Matsugu, Y. *Invariant Subspaces of the Privalov Spaces*, Far East J. Math. Sci. 2(4) (2000), 633–643.

[2] Mochizuki, N. *Algebras of Holomorphic Functions between H^p and N^+*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 898–902.

[3] Stoll, M. *Mean Growth and Taylor Coefficients of Some Topological Algebras of Analytic Functions*, Ann. Pol. Math. 35 (1977), 139–158.