

ヤコビ作用素のスペクトル解析と グラフの隣接作用素への応用

五十嵐 大輔

2005 年 2 月 17 日

1 ヤコビ作用素

定義 1.1. 2 つの実数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる .
ここで $\omega_n > 0$ とする .

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\omega_1} & & & 0 \\ \sqrt{\omega_1} & \alpha_2 & \sqrt{\omega_2} & & \\ & \sqrt{\omega_2} & \alpha_3 & \sqrt{\omega_3} & \\ & & \sqrt{\omega_3} & \alpha_4 & \sqrt{\omega_4} \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

をヤコビ作用素という .

定理 1.2. (1) のヤコビ作用素 J に対して $\{\alpha_n\}, \{\omega_n\}$ が有界な数列であるとき ,

$$\langle e_0, J^m e_0 \rangle = \int x^m \mu(dx) \quad (2)$$

を満たす確率測度が一意的に存在する . このとき ,
 μ は次の漸化式を満たす直交多項式の直交化測度である .

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = (x - \alpha_1)/\sqrt{\omega_1} \\ xP_n(x) = \sqrt{\omega_{n+1}}P_{n+1}(x) \\ \quad + \alpha_{n+1}P_n(x) + \sqrt{\omega_n}P_{n-1}(x) \end{cases}$$

定理 1.3. 定理 1.2 が成り立つとき , μ のスティル
チェス変換 G_μ は α_n, ω_n による連分数で表される .

$$G_\mu(z) \equiv \int \frac{\mu(dx)}{z - x} = \frac{1}{z - \alpha_1} - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2} - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3} - \dots \quad (3)$$

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を μ に付随するセゲー-ヤコビ
数列という . 式 (3) の右辺を計算し , 逆スティルチェ
ス変換を施すことにより , μ を求めることができる .
もしくは , 知られている連分数展開を式 (3) の形に
変形しても μ を求めることができる .

2 グラフと隣接作用素

定義 2.1. 空でない集合 V と $E \subset \{\{x, y\} ; x, y \in V, x \neq y\}$ の組 $G = (V, E)$ をグラフという .
 $\{x, y\} \in E$ を $x \sim y$ と書く . $\kappa(x) = |\{y \in V ; y \sim x\}|$ を x の次数という .

$\kappa(x) < \infty$ ($\forall x \in V$) が満たされるグラフを局所
有限グラフという . 以後グラフといえば , 局所有限
グラフであることを仮定する .

定義 2.2. グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列 $A = (A_{xy})_{x, y \in V}$ は , 成分が次のように定義される正方
行列である .

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & (x \sim y) \\ 0 & (x \not\sim y) \end{cases}$$

$G = (V, E)$ の隣接行列は $\ell^2(V)$ に作用する .
 $\{\delta_x ; x \in V\}$ を $\ell^2(V)$ の標準的な正規直交基底と
するとき , 次が成り立つ .

$$\langle \delta_x, A^n \delta_y \rangle = |\{x \text{ から } y \text{ への長さ } n \text{ の歩道}\}|.$$

3 量子分解法

グラフ $G = (V, E)$ において原点 $o \in V$ を適当に
選んで階層化する :

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{v \in V ; \partial(o, v) = n\}.$$

$x \in V_n$ に対して ,

$$A\delta_x = A^+\delta_x + A^-\delta_x + A^0\delta_x$$

$$A^\pm \delta_x = \sum_{\substack{y \sim x \\ y \in V_{n \pm 1}}} \delta_y, \quad A^0 \delta_x = \sum_{\substack{y \sim x \\ y \in V_n}} \delta_y$$

という分解を考える . また ,

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{|V_n|}} \sum_{x \in V_n} \delta_x$$

とし , $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ を正規直交基底とするヒルベルト空
間を $\Gamma(G)$ とおく .

定義 3.1. $A = A^+ + A^- + A^0$ を A の量子分解と
言い , A^+, A^-, A^0 を A の量子成分と言う .

定理 3.2. $\Gamma(G)$ が A の量子成分 A^+, A^-, A^0
で不変な部分空間であるとき , 2 つの数列
 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して ,

$$A^+ \Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1}} \Phi_{n+1}, \quad n \geq 0$$

$$A^- \Phi_0 = 0, \quad A^- \Phi_n = \sqrt{\omega_n} \Phi_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$A^0 \Phi_n = \alpha_{n+1} \Phi_n, \quad n \geq 0$$

特に, $\omega_1 = |V_1| = \kappa(o)$, $\alpha_1 = 0$ を満たす. さらに, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ をセゲー-ヤコビ数列とする確率測度を μ とすると,

$$\langle \Phi_0, A^m \Phi_0 \rangle = \int x^m \mu(dx) \quad (4)$$

が成り立つ.

4 距離正則グラフ

定理 3.2 の仮定を満たすグラフとして, 距離正則グラフを取り上げる. 距離正則グラフの場合, 式 (4) を満たす確率測度は, 隣接行列の固有値分布も同時に与えている.

定義 4.1. グラフ $G = (V, E)$ に対して, 非負の整数 i, j, k をとる. $\partial(x, y) = k$, $\partial(x, z) = i$, $\partial(z, y) = j$ となる $z \in V$ の個数が $x, y \in V$ によらないとき, グラフ G を距離正則グラフと呼ぶ. また, 定数 $p_{ij}^k = |\{z \in V; \partial(x, z) = i, \partial(y, z) = j\}|$ を交差数という.

距離正則グラフの隣接作用素の量子成分は次のように作用する.

$$\begin{aligned} A^+ \Phi_n &= \sqrt{p_{1,n}^{n+1} p_{1,n+1}^n} \Phi_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ A^- \Phi_0 &= 0, \quad A^- \Phi_n = \sqrt{p_{1,n-1}^n p_{1,n}^{n-1}} \Phi_{n-1}, \quad n \geq 1 \\ A^\circ \Phi_n &= p_{1,n}^n \Phi_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

5 Odd グラフ

Odd グラフは距離正則グラフである. 次数 k をパラメーターとして, $k \rightarrow \infty$ としたときの隣接行列の漸近的な固有値分布を求めたい.

定義 5.1. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2k-1\}$ とする. 頂点を $V^{(k)} = \{v \subset \Omega; |v| = k-1\}$ とし, $u \sim v \Leftrightarrow |u \cap v| = 0$ で定義される辺を $E^{(k)}$ とする. $O_k = (V^{(k)}, E^{(k)})$ を Odd グラフという. O_k の次数は k である.

Odd グラフの交差数は次のように計算される.

補題 5.2.

$$\begin{aligned} p_{1,n-1}^n &= \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad 1 \leq n \leq k-1. \\ p_{1,n+1}^n &= k - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad 1 \leq n \leq k-2. \\ p_{1,n}^n &= 0, \quad 1 \leq n \leq k-2, \quad p_{1,k-1}^{k-1} = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

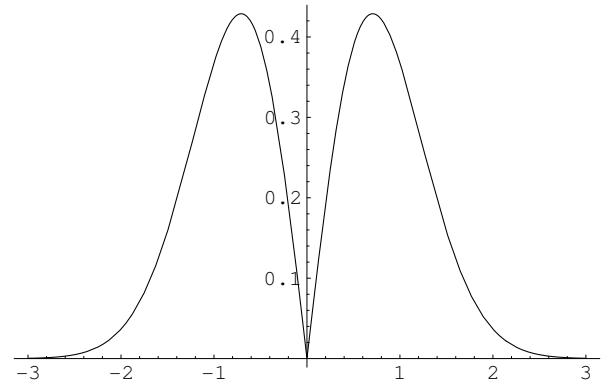


図 1: 両側レーリー分布

O_k の隣接行列 A_k の漸近的な固有値分布を求めるために, 平均 0, 分散 1 となるように正規化する. したがって, $A_k/\sqrt{k}$ の漸近的な固有値分布を求める. $k \rightarrow \infty$ におけるセゲー-ヤコビ数列は

$$\omega_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{1,n-1}^n(k) p_{1,n}^{n-1}(k)}{k}, \quad \alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{1,n-1}^{n-1}}{\sqrt{k}}$$

で与えられる. これらは交差数から直ちに計算される.

$$\omega_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad \alpha_n = 0, \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

定理 5.3. O_k の隣接行列 A_k に対して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \Phi_0, \left(\frac{A_k}{\sqrt{k}} \right)^m \Phi_0 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m |x| e^{-x^2} dx$$

が成り立つ.

定理 5.3 より $A_k/\sqrt{k}$ の漸近的な固有値分布を与える確率測度は,

$$\mu(dx) = |x| e^{-x^2} dx, \quad -\infty < x < +\infty$$

であることがわかる. この分布を両側レーリー分布という.

参考文献

- [1] N. Biggs: "Algebraic Graph Theory (2nd Ed.)," Cambridge University Press, 1993.
- [2] N. Biggs: Some odd graph theory, Ann. New York Acad. Sci. **319** (1979), 71-81.
- [3] P. Deift: "Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach," Courant Lect. Notes Vol. 3, Amer. Math. Soc., 1998.
- [4] D. Igarashi and N. Obata: Asymptotic spectral analysis of growing graphs: odd graphs and spidernets, preprint, 2004.
- [5] 明出伊類似・尾畑伸明: "量子確率論の基礎 (数理情報科学シリーズ 21)," 牧野書店, 2003.