フロベニウス・ペロン作用素と保測変換の測度論的性質

システム情報数理学II　青山 貴之

2006 年 2 月 16 日

1　はじめに

測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上に変換 S が与えられたとき，S を繰り返し作用させることで X がどのようにかき混ぜられてゆくかを測度論的な観点から考察していきたい．

特に，2 次写像 $S(x) = 4x(1-x)$ を具体例として取り扱う．区間 $[0,1]$ に初期値をとったとき，S を繰り返し作用することで得られる点列の分布の様子をヒストグラムで表示した結果，ある曲線に近づいていくように見える．

2　フロベニウス・ペロン作用素

定義 2.1 S を X 上の非特異変換とする．$L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上の変換 $f \mapsto Pf$ で

$$\int_A Pf(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

によって特徴付けられる P を S に対応する**フロベニウス・ペロン作用素**という．

定義 2.2

$$D(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) : f \geq 0,\ \|f\| = 1 \right\}$$

とおく．$f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**密度関数**という．また，$Pf = f$ をみたす $f \in D(X, \mathcal{A}, \mu)$ を P の**定常密度関数**という．

3　可測変換の測度論的不規則性

定義 3.1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の非特異変換 S が，**エルゴード変換**であるとは，零集合を除いて $S^{-1}(A) = A$ を満たすようなすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\mu(A) = 0 \quad もしくは \quad \mu(X \setminus A) = 0$$

が成り立つことをいう．

定理 3.2 S を X 上の非特異変換，P を S に付随するフロベニウス・ペロン作用素とする．S がエルゴード変換であるならば，$Pf_* = f_*$ となるような定常密度関数 f_* が高々 1 つ存在する．逆に，$f_*(x) > 0$ である定常密度関数が唯一存在するとき，S はエルゴード変換となる．

定理 3.3 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を有限測度空間，S を X 上の保測変換であり，かつエルゴード的であるとする．任意の可積分関数 f に対し，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x)\mu(dx) \quad \text{a.e. } x.$$

定義 3.4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を確率測度空間，すなわち，$\mu(X)$=1 とする．X 上の保測変換 S が**混合変換**であるとは，すべての $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$$

が成り立つことをいう．

定理 3.5 S が混合変換ならば，S はエルゴード変換である．

定義 3.6 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を確率測度空間とする．X 上の保測変換 S が，**完全変換**であるとは，$\mu(A) > 0$ を満たすようなすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S^n(A)) = 1$$

が成り立つことをいう．

完全変換は混合変換になるが，逆は成り立たない．

4 フロベニウス・ペロン作用素による保測変換の分類

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を確率測度空間，S を X 上の保測変換とする．

定理 4.1 P を S に付随するフロベニウス・ペロン作用素とする．

（i）S がエルゴード変換であることと，次の式が成り立つことは同値である．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle P^k f, g\right\rangle = \langle f,1\rangle\langle 1,g\rangle, \forall f\in L^1,\ \forall g\in L^\infty.$$

（ii）S が混合変換であることと，次の式が成り立つことは同値である．

$$\lim_{n\to\infty}\langle P^n f, g\rangle = \langle f,1\rangle\langle 1,g\rangle, \forall f\in L^1,\ \forall g\in L^\infty.$$

（iii）S が完全変換であることと，次の式が成り立つことは同値である．

$$\lim_{n\to\infty}\|P^n f - \langle f,1\rangle\| = 0, \quad \forall f\in L^1.$$

5 2 次写像 $S(x) = 4x(1-x)$

$S(x) = 4x(1-x)$ に対するフロベニウス・ペロン作用素 $P = P_S$ を求めると，

$$Pf(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left\{f\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right) + f\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)\right\}$$

となる．ここで，S に関する不変測度を求めるために，関数方程式 $Pf = f$ を解く必要がある．このままでは難しいので変数変換

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin^{-1}(1-2x)$$

を考える．ここで，$[0,1]$ 上の写像 T を

$$T(x) = g\circ S\circ g^{-1}(x)$$

で定義する．まず，$g^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi x)$ に注意して場合分けして考えると，

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & (x\in[0,\frac{1}{2})\ のとき) \\ 2(1-x), & (x\in[\frac{1}{2},1]\ のとき) \end{cases}$$

となる．この T は**テント写像**と呼ばれる．ここで，T に対応するフロベニウス・ペロン作用素を P_T とおく．

$$P_T f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

となる．

定理 5.1 $L^1[0,1]$ 上の写像 G を次のように定義する．

$$Gf(x) = f(g(x))g'(x), \quad f\in L^1[0,1].$$

このとき，次の式が成り立つ．

$$GP_T = P_S G.$$

さらに G は $L^1[0,1]$ 上の全単射である．

定理 5.2 $f \in L^1[0,1]$(又は $C(0,1)$) に対して次は同値である．

（i）$P_S f = f$.

（ii）$g = G^{-1}f$ が $P_T g = g$ を満たす．

2 進展開を利用することで次が示される．

定理 5.3 $f(x)$ は [0,1] 上の連続関数で，

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

を満たせば，$f(x)$ は定数関数である．

定理 5.4 $\rho(x)$ は $(0,1)$ 上の連続関数で，$P\rho = \rho$ を満たせば，

$$\rho(x) = \frac{c}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

特に，$\rho(x)$ が密度関数のときは，$c = 1$ である．

参考文献

[1] Andrzej Lasota and Michael C.Mackey, *“Chaos, Fractals, and Noise / Stochastic Aspects of Dynamics,”* (Springer-Verlag) 1995.

[2] Ulam, S.M. and von Neumann, *“On combination of stochastic and deterministic processes,”* (Bull. Am. Math. Soc., 53:1120) 1947.

[3] 志賀徳造, *“ルベーグ積分から確率論,”* 共立講座 21 世紀の数学 10(共立出版) 2000.