

確率微分方程式とファイナンスへの応用

システム情報数理学

田原 義浩

2008 年 2 月 14 日

1 イントロダクション

今仮に株式会社 A 社に投資しようと考えているとする。もし、 A 社の業績がよければ株価は上昇し、業績が悪ければ株価は下落する。ここで、損失をせずに、利益だけ得られる取引が出来たらよいと誰しもが考えるであろう。しかし、この都合の良い取引は存在するのだろうか。実は、存在するのである。それがオプション取引と呼ばれる取引である。

2 オプションとは

定義 2.1 オプションにはコールとプットと呼ばれる 2 つの基本的なタイプがある。

- コール・オプション：ある資産を将来の定められた期日までに定められた価格で購入する権利。
- プット・オプション：ある資産を将来の定められた期日までに定められた価格で購入する権利。

定められた期日のことを満期日、定められた価格のことを行使価格という。

定義 2.2 オプションは権利行使がいつ出来るかによって、ヨーロッパ型とアメリカ型に分かれる。

- ヨーロッパ型：満期日にのみ権利を行使できるオプション。
- アメリカ型：満期日以前にいつでも権利を行使できるオプション。

3 ブラック = ショールズのオプション価格式

以下では、ヨーロッパ型を仮定する。

定理 3.1 C はコール・オプションの価格、 P はプット・オプションの価格とする。また、 S は現在の株価、 X は行使価格、 r はリスクフリーレート、 T は満期までの期間、 σ はボラティリティとする。

$$\begin{aligned} C &= SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \\ P &= Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、

$$d_1 = \frac{\log(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

であり、 $N(x)$ は標準正規分布の累積確率分布関数 $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ である。

以下では、コール・オプションのみを考える。

4 インプライド・ボラティリティ

(1) を σ について解いたときの値をインプライド・ボラティリティと呼ぶ。これは非線形なので、簡単には解けない。従って、これを σ について解くには、何らかの方法で (1) を近似して近似解を求める必要がある。

5 近似公式と近似解

以下で用いる記号を導入する。

定義 5.1

$$\eta = \frac{S}{K}, m = -\frac{(1+\eta)\log\eta}{1-\eta}, D = \frac{C}{(1-\eta)S}, \xi = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

η は 1 のまわりで考えるのが一般的。以下、 $0 < \eta < 2$ と仮定。 η が 1 のまわりのとき、 m は 2 のまわりの値をとる。 D は既知の定数とする。また、 ξ は唯一の未知数である。

(1) 式に対し Taylor 展開を 2 ステップに分けて用いて計算し, 整理すると次式が得られる.

$$g_3(d_3) = \frac{1}{2} + \frac{4-m}{4\sqrt{2\pi}}d_3 + \frac{m}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{d_3}.$$

これが (1) 式の近似公式である. 次に d_3 の近似値 $\tilde{d}_3$ を求める. $\tilde{d}_3$ は $g_3 = D$ の解であるので, これを解くと

$$\tilde{d}_3 = \frac{-\sqrt{2\pi}(1-2D) \pm \sqrt{2\pi(1-2D)^2 - 2m(4-m)}}{4-m}.$$

となる. この 2 解のうち, どちらを d_3 の近似値とするかについては次のようにする.

(1) $0 < \eta < 1$ のとき,

$$\tilde{d}_3 = \frac{-\sqrt{2\pi}(1-2D) - \sqrt{2\pi(1-2D)^2 - 2m(4-m)}}{4-m}.$$

(2) $1 < \eta < 2$ のとき,

$$\tilde{d}_3 = \frac{-\sqrt{2\pi}(1-2D) + \sqrt{2\pi(1-2D)^2 - 2m(4-m)}}{4-m}.$$

6 誤差評価

$\tilde{\xi}$ の ξ に対する相対誤差を考える. $\left| \frac{\tilde{\xi} - \xi}{\xi} \right| = \left| \frac{d_3 - \tilde{d}_3}{\tilde{d}_3} \right|$ であるから, $\tilde{d}_3$ の相対誤差評価 $\left| \frac{d_3 - \tilde{d}_3}{\tilde{d}_3} \right|$ を考えればよい.

$g_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{4-m}{4\sqrt{2\pi}}x + \frac{m}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}$ に対して平均値の定理を用いると, ある定数 c が存在して, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} |d_3 - \tilde{d}_3| &= \frac{1}{|g'_3(c)|} |g_3(d_3) - g_3(\tilde{d}_3)| \\ &= \frac{1}{|g'_3(c)|} |g_3(d_3) - g_1(d_3)|. \end{aligned}$$

$(A) = |g_3(d_3) - g_1(d_3)|$, $(B) = \frac{1}{|g'_3(c)|}$ とおくと, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (A) &= |g_3(d_3) - g_1(d_3)| \leq \frac{17}{48\sqrt{2\pi}}|d_3|^3 + \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\xi, \\ (B) &= \frac{1}{|g'_3(c)|} \leq \sqrt{2\pi}(d_3^2 + \tilde{d}_3^2). \end{aligned}$$

上の不等式より, $|d_3|$ と ξ が 0 に収束するとき (A) は 0 に収束する. (A) , (B) より次の不等式が成り立つ.

$$\left| \frac{d_3 - \tilde{d}_3}{\tilde{d}_3} \right| \leq 4\sqrt{2\pi}(A).$$

以上をまとめると, 次の結果が得られる.

定理 6.1 定数 $\xi_0 > 0$, $d_0 > 0$ が存在して, $\xi \in (0, \xi_0]$, $d_3 \in [-d_0, 0) \cup (0, d_0]$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$\left| \frac{\tilde{\xi} - \xi}{\xi} \right| = \left| \frac{d_3 - \tilde{d}_3}{\tilde{d}_3} \right| \leq \frac{17}{12}|d_3|^3 + 6\xi. \quad (2)$$

$|d_3| (\neq 0)$ と ξ が 0 に収束するとき, (2) の右辺は 0 に収束する. すなわち, 我々が提案した近似解 $\tilde{\xi}$ の相対誤差は 0 に収束する.

7 今後の課題

1. 本論文で提案した近似解と先行研究を, 実際の数値データを用いて比較実験すること.
2. より高次の Taylor 展開を用いる方法. この方法で得られる近似解のほうが精度が高いと考えられる.
3. 正規分布の分布関数を, Williams の公式と呼ばれる式

$$N(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^{-2x^2/\pi}}, & (x \geq 0), \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^{-2x^2/\pi}}, & (x < 0), \end{cases}$$

で近似し, その近似式から近似解を求める方法.

参考文献

主な参考文献.

- [1] M.Brenner, M.G.Subrahmanyam(1988):A simple formula to compute the implied standard deviations, Financial Analysts Journal 5, 80-83
- [2] C.J.Corrado, T.W.Miller(1996):A note on a simple, accurate formula to compute implied standard deviations. Journal of Banking and Finance 20, 595-603
- [3] Li,Steven(2005):A new formula for computing implied volatility. Applied Mathematics and Computation 170, 611-625