

確率制御と最適投資選択問題への応用

システム情報数理学

遠藤 崇史

2009/2/12

1 イントロダクション

確率制御の理論を用いて2種類の最適投資選択問題の解を導出し、最適な戦略を実行した際の資産過程の期待値と分散をそれぞれ計算する。

2 最適投資選択問題

初めに安全証券 S_t^0 , 危険証券 $\{S_t^i\}_{i \geq 2}$, 経済要因 X_t を用いて、市場モデルを次のように定める。

$$\begin{aligned} \cdot dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \quad S_t^0 = s^0 \\ \cdot dS_t^i &= S_t^i \left\{ (a + AX_t)dt + \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma^{ik} dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s^i \\ \cdot dX_t &= (b + BX_t)dt + \Lambda dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ただし、 W_t は $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の $m+n$ 次元ブラウン運動であり、 r は $\mathbb{R}$ に値を取る実数値関数、 a, b は $\mathbb{R}^m$ に値を取るベクトル関数、 A, B は $\mathbb{R}^{m \times m}$, Σ, Λ はそれぞれ $\mathbb{R}^{m \times (m+n)}$, $\mathbb{R}^{n \times (m+n)}$ に値を取る行列値関数とする。

投資家の選択する行動基準を次のように定める。

Definition 2.1 (自己資金充足戦略)

i 番目の証券への投資比率 h_t^i が次の式を満たすとする。

$$h_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^m h_t^i$$

また、資産過程 V_t を確率微分方程式

$$\frac{dV_t}{V_t} = \sum_{i=0}^m h_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \quad V_0 = v$$

の解とし、 $h_t = (h_t^1, \dots, h_t^m)$ と V_t は2乗可積分であるとする。このとき、総資産 V_t を保有比率 h_t で運用する戦略 (V, h) を 自己資金充足戦略という。

ここで、リスク鋭感的評価関数を次のように定める。

$$\begin{aligned} J(T, v, h) &= -\frac{2}{\theta} \log E \left[V_T^{-\frac{\theta}{2}} \right] = -\frac{1}{2} \log E \left[e^{-\frac{\theta}{2} \log V_T} \right], \\ \theta &> -2, \quad \theta \neq 0 \end{aligned}$$

Definition 2.2 (完全情報下での最適投資選択問題)

h_t が $\mathbb{R}^m$ に値をとる $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u, X_u; u \leq t)$ -適度な確率過程であり、 $h_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^m h_t^i$ となるとき、その $h^* = (h_t^0, h_t^*)$ の全体を $\mathcal{H}_1(T)$ とする。完全情報下での最適投資選択問題とは

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_1(T)} J(T, v, h) = J(T, v, \hat{h})$$

を実現するような $\hat{h}$ を求める問題をいう。

Definition 2.3 (部分情報下での最適投資選択問題)

h_t が $\mathbb{R}^m$ に値をとる $\mathcal{G}_t = \sigma(S_u; u \leq t)$ -適度な確率過程であり、 $h_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^m h_t^i$ となるとき、その $h^* = (h_t^0, h_t^*)$ の全体を $\mathcal{H}_2(T)$ とする。部分情報下での最適投資選択問題とは

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_2(T)} J(T, v, h) = J(T, v, \hat{h})$$

を実現するような $\hat{h}$ を求める問題をいう。

3 最適投資戦略

Theorem 3.1

完全情報下で、評価関数 J を最大化するような最適制御 $\hat{h}$ は次のような表現をもつ。

$$\begin{aligned} \hat{h}(t, X_t) &= \frac{2}{\theta + 2} (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (a + AX_t - r\mathbf{1} \\ &\quad - \frac{\theta}{2} \Sigma \Lambda^* \{N(t)X_t + p(t)\}) \end{aligned}$$

この N, p, k は次式を満たす。

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) + K_1^* N(t) + N(t) K_1 + N(t) K_0 N(t) + K_2 &= 0, \quad N(T) = 0 \\ \dot{p}(t) + K_1^* p(t) + N(t) L_1 + N(t) K_0 p(t) + L_2 &= 0, \quad p(T) = 0 \\ \dot{k}(t) + \frac{1}{2} \text{tr}(\Lambda \Lambda^* N(t)) + L_1^* p(t) + r \\ &\quad + \frac{2}{2(\theta + 2)} (a - r\mathbf{1})^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (a - r\mathbf{1}) = 0, \quad k(T) = \log v \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} K_0 &= -\frac{\theta}{2} \Lambda \left(I - \frac{\theta}{\theta + 2} \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \Sigma \right) \Lambda \\ K_1 &= B - \frac{\theta}{\theta + 2} \Lambda \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} A \\ K_2 &= \frac{2}{\theta + 2} A^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} A \end{aligned}$$

$$L_1 = b - \frac{\theta}{\theta+2} \Lambda \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (a - r \mathbf{1})$$

$$L_2 = \frac{2}{\theta+2} A^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (a - r \mathbf{1})$$

Theorem 3.2

部分情報下では、評価関数 J を最大にするような最適制御 $\hat{h}$ は次のような表現を持つ。

$$\hat{h}(t, \gamma_t) = \frac{2}{\theta+2} (\Sigma \Sigma^*)^{-1} [a - r \mathbf{1} + \theta (A \Pi + \Sigma \Lambda^*) f + \{A + \theta (A \Pi + \Sigma \Lambda^*) R\} \gamma_t]$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \cdot \dot{R} + R \left\{ B - \frac{\theta}{\theta+2} (A \Pi_t + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} A \right\} \\ & + \left\{ B^* - \frac{\theta}{\theta+2} A^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) \right\} R \\ & + \frac{\theta^2}{\theta+2} R (\Pi_t A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) R \\ & - \frac{1}{\theta+2} A^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} A = 0, \quad R(T) = 0 \\ & \cdot \dot{f} + \left\{ B^* + \frac{2\theta}{\theta+2} R_t (\Pi_t A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) \right\} \\ & - \frac{\theta}{\theta+2} A^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) f + Rb \\ & - \frac{1}{\theta+2} \{A + \theta (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) R\} (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (a - r \mathbf{1}) = 0, \\ & f(T) = 0 \\ & \cdot \dot{k} - r(t) + \text{tr} [R (\Pi_t A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*)] + f^* b \\ & + \theta f^* (\Pi_t A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi_t + \Sigma \Lambda^*) f \\ & - \frac{1}{\theta+2} C_t^* (\Sigma \Sigma^*) C_t = 0, \quad K(T) = 0 \\ & \cdot C_t = a - r(t) \mathbf{1} + \theta (A \Pi_t + \Sigma \Lambda) f \\ & \cdot d\gamma_t = \{b + B\gamma_t - (\Pi A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (d + A\gamma_t)\} dt \\ & + (\Pi A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} dY_t, \quad \gamma_0 = x \\ & \cdot \dot{\Pi} + (\Pi A^* + \Lambda \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (A \Pi + \Sigma \Lambda) - \Lambda \Lambda^* \\ & - B \Pi - \Pi B^* = 0, \quad \Pi(0) = 0 \end{aligned}$$

4 最適投資戦略の検証

$a, A, b, B, r, \sigma, \lambda$ は 1 次の実定数とし、 $\Sigma = (\sigma, 0)^*$, $\Lambda = (0, \lambda)$ とする。また、危険証券と経済要因に対しても市場にはそれぞれ 1 つしか存在しないの場合 ($i = 1, m = 1$ の場合) について考える。

i) 完全情報下の場合

完全情報下での最適投資戦略は

$$h(t, X_t) = \frac{2}{\theta+2} \sigma^{-2} (a - r + A X_t)$$

となる。このとき、 V_t の期待値と分散は

$$E[V_t] = v e^{rt} u_1(t, x)$$

$$V[V_t] = E[V_t^2] - E[V_t]^2 = v^2 e^{2rt} (u_2(t, x) - u_1^2(t, x))$$

となる。ただし、 $\xi_1 = \frac{2}{\theta+2}$, $\xi_2 = 4 \frac{\theta+3}{(\theta+2)^2}$ とすると、

$$u_1(t, x) = v \bar{E} \left[\exp \left(\int_0^t \{r + \xi_1 \sigma^{-2} (a - r + A X_s)^2\} ds \right) \right]$$

$$u_2(t, x) = v^2 \check{E} \left[\exp \left(\int_0^t \{2r + \xi_2 \sigma^{-2} (a - r + A X_s)^2\} ds \right) \right]$$

である。 u_1, u_2 は Feynman-Kac の公式から Cauchy 問題の解であることがわかる。また、 $\frac{\partial E[V_t]}{\partial t} \geq 0$ であることから、期待値 $E[V_t]$ は t に関して単調増加であることがわかる。

ii) 部分情報下の場合

部分情報下での最適投資戦略は

$$h(t, \gamma_t) = \frac{2}{\theta+2} \sigma^{-2} (a - r + \theta A \Pi f + (A + \theta A \Pi R) \gamma_t)$$

となる。このとき、 V_t の期待値と分散は

$$E[V_t] = v e^{rt} \mu_1(t, x)$$

$$V[V_t] = E[V_t^2] - E[V_t]^2 = v^2 e^{2rt} (\mu_2(t, x) - \mu_1^2(t, x))$$

として求められる。ただし、

$$\begin{aligned} \mu_1(t, x) = \bar{E} \left[\exp \left(\int_0^t \left\{ \frac{2}{\theta+2} \sigma^{-2} (a - r + A \gamma_s) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (a - r + \theta A \Pi_s f_s + (A + \theta A \Pi_s R_s) \gamma_s) \right\} ds \right) \right] \\ \mu_2(t, x) = \check{E} \left[\exp \left(\int_0^t \left\{ \frac{4}{(\theta+2)^2} \sigma^{-2} (a - r + \theta A \Pi_s f_s \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (A + \theta A \Pi_s R_s) \gamma_s)^2 + \frac{4}{\theta+2} \sigma^{-2} (a - r + A \gamma_s) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (a - r + \theta A \Pi_s f_s + (A + \theta A \Pi_s R_s) \gamma_s) \right\} ds \right) \right] \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- [1] 長井英生: フィルタリング, 確率制御, そして数理ファイナンス, 応用数理 Vol.17, No.1 (2006) pp. 29–37.
- [2] R.C.Merton: An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica* 41 (1973), 867–887.
- [3] H.Nagai: Risk-sensitive dynamic asset management with partial information: Stochastics in Finite and Infinite Dimension, A Volume in Honor of Gopinath Kallianpur, pp.321–340, 2000.