グラフ上のコンタクト・プロセスにおける相転移現象

システム情報数理学
三品　利恵

2010 年 2 月 10 日

1　イントロダクション

コンタクト・プロセスとは，伝染病の伝播などを表すモデルであり，連続時間のマルコフ過程に属する．例えば，グラフ上のサイトを病人または健康な人と考え，一定時間が経過した後，感染が残っているか否かという点に注目する．等質なツリー上や d 次元の格子上におけるコンタクト・プロセスについては，広く研究されている．ここでは, 等質なツリーに大きなサイクルを加えた形である Spider net と，等質でないツリーに注目する．

2　Spider net の構成

定義 2.1 (Spider net S_d)

等質なツリー $T_d(d \geq 3)$ の各辺を *short-range edge* とよぶ．T_d において，ルート O からの距離が n である点がサイクルを持つように，以下の規則に従って *long-range edges* を結ぶ.

1. ルートからの距離が 1 の点に注目し，$(1),(2),...,(d)$ と番号付けする．
   - (i)　(1) と (2)，(2) と $(3),...,(d-1)$ と (d) を結ぶ.
   - (ii)　(d) と (1) を結ぶ.
2. ルートからの距離が 2 の点に注目し，$1 \leq k \leq d$ について，(k) と隣り合う点を $(k,1),(k,2),...,(k,d-1)$ と番号付けする．
   - (i)　$(k,1)$ と $(k,2)$，$(k,2)$ と $(k,3),...,(k,d-2)$ と $(k,d-1)$ を結ぶ.
   - (ii)　$(1,d-1)$ と $(2,1)$，$(2,d-1)$ と $(3,1),...,(d-1,d-1)$ と $(d,1)$ を結ぶ.
   - (iii)　$(d,d-1)$ と $(1,1)$ を結ぶ.
3. 同様に，ルートからの距離が $3,4,5,...$ の点にそれぞれ注目し，*long-range edges* を結ぶ.

ルート以外の各点は, ちょうど 2 つの *long-range neighbor* をもつ.

3　コンタクト・プロセスの定義

定義 3.1 (コンタクト・プロセス)

S をツリーまたは S_d とする．時刻 t における S 上のコンタクト・プロセスの状態を ξ_t で表すものとする．ξ_t は以下の規則にしたがって時間発展する．

1. サイト $x \in S$ に粒子が 1 つ存在するならば，x の $d+2$ 個の最近接サイト（ルートのみ d 個の最近接サイト）y に対して，待ち時間の分布がパラメータ λ の指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ に従い粒子を 1 個生成する．
2. 粒子は待ち時間の分布がパラメータ 1 の指数分布 $f(t) = e^{-t}$ に従い死滅する．
3. 1 つのサイトには高々 1 個の粒子しか存在できない．

ξ_t^x はサイト $x \in S$ にのみ粒子が存在する初期配置から出発したコンタクトプロセスの時刻 t における状態を表す．また，$\xi_t^x(y)$ をサイト y に存在する粒子の数とすると，$|\xi_t^x| = \sum_{y \in S} \xi_t^x(y)$ は粒子の総数を表す.

定義 3.2 (2 つの臨界値)

2 つの臨界値を次のように定義する．

$$\lambda_1 = \inf\{\lambda : P(|\xi_t^O| \geq 1, \forall t > 0) > 0\},$$
$$\lambda_2 = \inf\{\lambda : P(\limsup_{t\to\infty} \xi_t^O(O) = 1) > 0\}.$$

等質なツリー $T_d(d \geq 3)$ については，$\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つ (Pemantle (1992)，Liggett (1996))．一方で，d 次元の格子については，$\lambda_1 = \lambda_2$ が成り立つ (Bezuidenhout and Grimmett (1990))．

4　Spider net 上のコンタクト・プロセス

S_d のグラフの成り立ちに注目する．同じ λ の値をとるとき，T_d より S_d，S_d より $\tilde{S}_d$，$\tilde{S}_d$ より T_{d+2} のほうが粒子数の期待値はより大きくなる．ただし，$\tilde{S}_d$ とは，ルートの次数が d，ルート以外のサイトの次数が $d+2$ のツリーのことである．粒子数の期待値の大小関係と λ_1 の定義より，

$$\lambda_1^{T_d} \geq \lambda_1^{S_d} \geq \lambda_1^{\tilde{S}_d} \geq \lambda_1^{T_{d+2}}$$

が成り立つ．また，等質なツリーの場合，

$$\frac{1}{d} \leq \lambda_1^{T_d} \leq \frac{1}{d-2}$$

が成り立つ (シナジ (2001) 参照)．よって，次の定理が成り立つ．

定理 4.1

S_d 上のコンタクト・プロセスにおける λ_1 と $\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセスにおける λ_1 について，

$$\frac{1}{d+2} \leq \lambda_1^{\tilde{S}_d} \leq \lambda_1^{S_d} \leq \frac{1}{d-2}$$

が成り立つ．

5 $\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセス

定理 5.1

$\tilde{S}_d(d \geq 5)$ 上のコンタクト・プロセスにおいて，

$$\lambda_2^{\tilde{S}_d} \geq \frac{1}{2\sqrt{d+1}}$$

が成り立つ．

証明の流れ

1. $\tilde{S}_d$ 上の離散時間ランダム・ウォークにおける $p_{2n}(O,O)$ を求める．
2. $\tilde{S}_d$ 上の連続時間ランダム・ウォークにおける $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log P_t(O,O)$ を求める．
3. $\tilde{S}_d$ 上の連続時間分枝ランダム・ウォークにおける λ_2 を求める．

定理 4.1 と定理 5.1 より，次の定理が成り立つ．

定理 5.2

$\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセスにおいて，$d \geq 9$ のとき

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

が成り立つ．

一般的に，次数有限の連結な無限グラフについて，次の定理が成り立つことが知られている．

定理 5.3 (Schonmann (2001))

次数有限の連結な無限グラフ $G = (V,E)$ とその部分グラフ $G' = (V', E')$ について，

$$\partial_E V' = \{e \in E; e \cap V' \neq \emptyset, e \cap V'^c \neq \emptyset\},$$
$$i_E(G) = \inf\left\{\frac{|\partial_E V'|}{|V'|} : V' \subset V, 0 \neq |V'| < \infty\right\}$$

と定義し，最大次数を $D(G)$，最小次数を $d(G)$ と表す．

$$i_E(G) > \frac{D(G)^2}{\sqrt{D(G)^2 + d(G)^2}}$$

が成り立つとき，G 上のコンタクト・プロセスについて

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

が成り立つ．

上の定理より，$d \geq 15$ のとき，S_d 上のコンタクト・プロセスと $\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセスについて $\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つ．これに対し，私は定理 5.2 の通り，$\tilde{S}_d$ について $d \geq 9$ の場合に結果を改善することに成功した．

6 まとめ

1. Spider net S_d 上のコンタクト・プロセスにおいて，$d \geq 15$ のとき $\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つ．また，
$$\frac{1}{d+2} \leq \lambda_1^{S_d} \leq \frac{1}{d-2}$$
が成り立つ．
2. $\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセスにおいて，
$$\frac{1}{d+2} \leq \lambda_1^{\tilde{S}_d} \leq \frac{1}{d-2} \quad , \quad \lambda_2^{\tilde{S}_d} \geq \frac{1}{2\sqrt{d+1}} \quad (d \geq 5)$$
が成り立ち，$d \geq 9$ のとき $\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つ．
3. Spider net S_d 上のコンタクト・プロセスにおいて，$d \leq 14$ のとき $\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つか否かということが課題として残された．
4. $\tilde{S}_d$ 上のコンタクト・プロセスにおいて，$d \leq 8$ のとき $\lambda_1 < \lambda_2$ が成り立つか否かということが課題として残された．

参考文献

[1] A. M. Stacey : The existence of an intermediate phase for the contact process on trees, The Annals of Probability 24 (1996), 1711–1726.

[2] R. Durrett and P. Jung : Two phase transitions for the contact process on small worlds, Stochastic Processes and their Applications 117 (2007), 1910–1927.

[3] R. H. Schonmann : Multiplicity of phase transitions and mean-field criticality on highly non-amenable graphs, Communications in Mathematical Physics 219 (2001), 271–322.

[4] C. Bezuidenhout and G. Grimmett : The critical contact process dies out, The Annals of Probability 18 (1990), 1462–1482.

[5] R. Pemantle : The contact process on trees, The Annals of Probability 20 (1992), 2089–2116.

[6] T. M. Liggett : Multiple transition points for the contact process on the binary tree, The Annals of Probability 24 (1996), 1675–1710.

[7] R. B. シナジ (今野紀雄・林俊一訳) : マルコフ連鎖から格子確率モデルへ, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001.

[8] 今野紀雄 : 無限粒子系の科学, 講談社, 2008.

[9] 志賀徳造 : ルベーグ積分から確率論, 共立出版, 2000.