ランダムウォークの推移確率の漸近評価

システム情報数理学 ii
芳賀智史

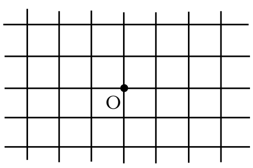
平成 24 年 2 月 13 日

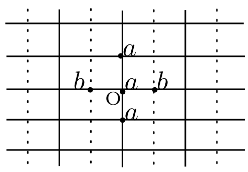
1　概要

グラフ上の単純ランダムウォークの n-step 推移確率の漸近評価の例として, 次のようなものがある.

- $\boldsymbol{Z}^2$: $Q^{(2n)}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim (\pi n)^{-1} \ \ (n \to \infty)$
- 三角格子: $Q^{(n)}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{\sqrt{3}}{2}(\pi n)^{-1} \ \ (n \to \infty)$
- 六角格子:
  $Q^{(2n)}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{3\sqrt{3}}{4}(\pi n)^{-1} \ \ (n \to \infty)$
- カゴメ格子:
  $Q^{(n)}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{2\sqrt{3}}{3}(\pi n)^{-1} \ \ (n \to \infty)$

これらに対し, $\boldsymbol{Z}^2$ から頂点を残して, $x = \pm 1, \pm 3, \cdots$ を除いたようなグラフを考える.(このグラフを $\boldsymbol{G}$ と表す)





このグラフ $\boldsymbol{G}$ 上の単純ランダムウォークの n-step 推移確率の漸近評価を調べる.

2　グラフG上のランダムウォーク

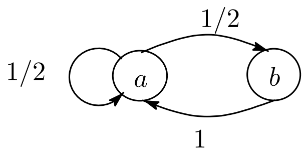
$\boldsymbol{G}$ 上のランダムウォークを次の 2 段階に分けて考える.

(i) 移動後の頂点のタイプを 2 つのタイプ a, b からランダムに選ぶ.

(ii) 次に, 選ばれた点のタイプうち, その 2 点から 1 点を選び, 移動する.

(i) のタイプの変化は, 状態空間 $\{a, b\}$ をもつマルコフ連鎖であり, これを $\{\xi(n)\}$ とすると, 推移確率は次のように表される.

$$T(x,y) = \begin{cases} 1 & ,(x,y) = (b,a) \\ \dfrac{1}{2} & ,(x,y) = (a,a),(a,b) \\ 0 & ,\text{それ以外} \end{cases}$$



$\{\xi(n)\}$ とは独立な確率変数の列 $\{Y_{xy}(n)\}$ $(xy = aa, ab, ba)$ を導入する. ここで, $\{Y_{xy}(n) : n \geq 1, xy = aa, ab, ba\}$ は独立確率変数の系で,

$$P(Y_{aa}(n) = (0, \pm 1)) = \frac{1}{2}, P(Y_{ab}(n) = (\pm 1, 0)) = \frac{1}{2}$$
$$P(Y_{ba}(n) = (\pm 1, 0)) = \frac{1}{2}$$

を満たす. さらに, 各 $n \geq 1$ に対して, $Y_{aa}(n), Y_{ab}(n), Y_{ba}(n)$ の分布の特性関数を $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し, それぞれ

$$\varphi_{aa}(\boldsymbol{\theta}) = \cos\theta_2$$
$$\varphi_{ab}(\boldsymbol{\theta}) = \varphi_{ba}(\boldsymbol{\theta}) = \cos\theta_1$$

と表す. そして, $\boldsymbol{G}$ 上のランダムウォークの n 歩目の位置 $X(n)$ は,

$$X(n) = X(0) + Y_{\xi(0)\xi(1)}(1) + \cdots + Y_{\xi(n-1)\xi(n)}(n)$$

により与えられ, これが $\boldsymbol{G}$ 上のランダムウォークとなる.($X(n)$ のタイプは, $\xi(n)$ のタイプに一致する)
ここで, $\boldsymbol{G}$ 上のランダムウォークの n-step 推移確率を $Q^{(n)}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{G})$ と表すと, 次のことが成り立つ.

命題 2.1

$$Q^{(2n)}(\mathbf{0},\mathbf{0})$$
$$= \pi^{-2} P(\xi(2n) = a) \int_{[-\pi/2,\pi/2]^2} H_{2n}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$$

が成り立つ. ここで, 一般の n に対して,

$$H_n(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{E}\left[(\cos\theta_2)^{M_{aa}(n)}(\cos\theta_1)^{N_{ab}(n)} | \xi(n) = a\right]$$
$$M_{xy}(n) = |\{1 \leq m \leq n : \xi(m-1)\xi(m) = xy\}|$$
$$N_{ab}(n) = M_{ab}(n) + M_{ba}(n)$$

とする.

漸近評価を求めるために, 補題をいくつか用意する.

補題 2.1　任意の $n \geq 0$ に対し,

$$\left|T^{(n)}(a,a) - \frac{2}{3}\right| \leq 2^{-n}$$
$$\left|T^{(n)}(a,b) - \frac{1}{3}\right| \leq 2^{-n}$$
$$\left|T^{(n)}(b,a) - \frac{2}{3}\right| \leq 2^{-n}$$

が成り立つ. ここで, $T^{(n)}(x,y)\ \ (x,y \in \{a,b\})$ はマルコフ連鎖 $\{\xi(n)\}$ の n-step 推移確率を表す.

補題 2.2　ある定数 $C > 0$ が存在して, $xy = aa$ または ab または ba に対して,

$$\boldsymbol{E}\left[\left(M_{xy}(n) - \frac{n}{3}\right)^2\right] \leq Cn, \ \ n = 1, 2, \cdots$$

が成り立つ. さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$P\left(\left|M_{xy}(n) - \frac{n}{3}\right| > \varepsilon n\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n}, \ \ n \geq 1$$

が成り立つ.

補題 2.3　(i) $0 < s < 1$ に対し, 定数 $0 < c_1(s) < 1$ が存在して,

$$\boldsymbol{E}\left[s^{M_{aa}(n)} | \xi(0) = a\right] \leq c_1(s)^n \ \ (n \geq 1)$$

が成り立つ.
(ii) $0 < s < 1$ に対し, 定数 $0 < c_2(s) < 1$ と $c_3(s) > 0$ が存在して,

$$\boldsymbol{E}\left[s^{N_{ab}(n)} | \xi(0) = a\right] \leq c_3(s) c_2(s)^n \ \ (n \geq 1)$$

以上の結果から, 次の漸近評価が得られる.

定理 2.1　$\boldsymbol{G}$ 上の単純ランダムウォークの n-step 推移確率を $Q^{(n)}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})\ \ (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{G})$ としたとき,

$$Q^{(2n)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim \sqrt{2}(\pi n)^{-1} \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ.

3　定理 2.1 の証明の概略

(step 1) $0 < \delta < \pi/4$ を固定. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$A^{\varepsilon}(2n) = \{\left|M_{aa}(2n) - \tfrac{2n}{3}\right| < 2\varepsilon n, \left|M_{ab}(2n) - \tfrac{2n}{3}\right| < 2\varepsilon n, \left|M_{ba}(2n) - \tfrac{2n}{3}\right| < 2\varepsilon n\}$$

とおく. そして, 命題 2.1 の積分を 3 つに分けて,

$$Q^{(2n)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = I_1(2n) + I_2(2n) + I_3(2n)$$

とおく. ただし,

$$\begin{aligned}
I_1(2n) &= \pi^{-2} P(\xi(2n) = a) \int_{|\boldsymbol{\theta}| < \delta} H^1_{2n}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \\
&\quad \times P(A^{\varepsilon}(2n) | \xi(2n) = a) \\
I_2(2n) &= \pi^{-2} P(\xi(2n) = a) \int_{|\boldsymbol{\theta}| < \delta} H^2_{2n}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \\
&\quad \times P(A^{\varepsilon}(2n)^c | \xi(2n) = a) \\
I_3(2n) &= \pi^{-2} P(\xi(2n) = a) \\
&\quad \times \int_{[-\pi/2, \pi/2]^2 \cap (|\boldsymbol{\theta}| \geq \delta)} H_{2n}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \\
H^1_{2n}(\boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{E}[(\cos\theta_2)^{M_{aa}(2n)} (\cos\theta_1)^{N_{ab}(2n)} \\
&\qquad |\xi(2n) = a, A^{\varepsilon}(2n)] \\
H^2_{2n}(\boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{E}[(\cos\theta_2)^{M_{aa}(2n)} (\cos\theta_1)^{N_{ab}(2n)} \\
&\qquad |\xi(2n) = a, A^{\varepsilon}(2n)^c]
\end{aligned}$$

とする.

(step 2) 補題 2.3 を用いて, $I_3(2n)$ を評価することで, $\lim_{n \to \infty} n I_3(2n) = 0$ を示す.

(step 3) 事象 $A^{\varepsilon}(2n)^c$ において,

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta_2)^{M_{aa}(2n)} (\cos\theta_1)^{N_{ab}(2n)} \\
&\leq (\cos\theta_2)^{\frac{2n}{3}} + (\cos\theta_1)^{\frac{2n}{3}}
\end{aligned}$$

が成り立つことと, 補題 2.2 を用いることで $I_2(2n)$ を評価する. さらに, 積分の漸近公式

$$\int_{-\delta}^{\delta} (\cos\theta)^t d\theta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \ \ (t \to +\infty)$$

を用いることで, $\lim_{n \to \infty} n I_2(2n) = 0$ が示される.

(step 4) 事象 $A^{\varepsilon}(2n)$ において,

$$\begin{aligned}
&\{\cos\theta_2 (\cos\theta_1)^2\}^{\frac{2n}{3} + 2\varepsilon n} \\
&\leq (\cos\theta_2)^{M_{aa}(2n)} (\cos\theta_1)^{N_{ab}(2n)} \\
&\leq \{\cos\theta_2 (\cos\theta_1)^2\}^{\frac{2n}{3} - 2\varepsilon n}
\end{aligned}$$

により, $I_1(2n)$ を評価し, 積分の漸近公式

$$\int_{|\boldsymbol{\theta}| < \delta} (\cos\theta_2 (\cos\theta_1)^2)^t d\boldsymbol{\theta} \sim \frac{\sqrt{2}\pi}{t} \ \ (t \to \infty)$$

を用いることで, $\lim_{n \to \infty} n I_1(2n) = \sqrt{2}\pi^{-1}$ が成り立つ.

参考文献

[1] 志賀徳造: 共立講座 21 世紀の数学 (第 10 巻) ルベーグ積分から確率論, 共立出版, 2000

[2] Frank Spitzer: Principles of RandomWalk (Graduate Texts in Mathematics - 34), Springer-Verlag, 1976

[3] R.B. シナジ: マルコフ連鎖から格子確率モデルへ, Springer, 2001.