出生死亡過程の一般化

竹田　惇一

東北大学大学院情報科学研究科

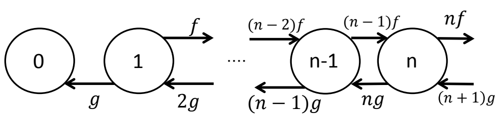
システム情報科学専攻

はじめに

本修士論文では, いくつかの年齢層をもつ生物集団からなる出生死亡過程の一般化を考えた. 標準的な出生死亡過程では, 集団に年齢層を考えず, 全個体数の増減のみを考える. そこで, 個体の成長を加味したモデルを調べることを目的とした.

1　標準的な出生死亡過程

$f > 0$ を出生レート, $g > 0$ を死亡レートとする.



$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ を出生レート f, 死亡レート g の出生死亡過程とする. 初期条件は,

$$P(X(0)=n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする. 求める確率は,

$$p_n(t) = P(X(t)=j|X(0)=1)$$

である.

Theorem 1.1　(1) $f \neq g$ のとき,

$$c(t) = f \cdot \frac{\mathrm{e}^{(f-g)t}-1}{f\mathrm{e}^{(f-g)t}-g}, \quad d(t) = g \cdot \frac{\mathrm{e}^{(f-g)t}-1}{f\mathrm{e}^{(f-g)t}-g}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} p_0(t) &= d(t) \\ p_n(t) &= c(t)^{n-1}(1-c(t))(1-d(t)) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

である.

(2) $f = g$ のとき,

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{ft}{ft+1} \\ p_n(t) &= \frac{(ft)^{n-1}}{(1+ft)^{n+1}} \qquad (n \geq 1) \end{aligned}$$

となる.

Theorem 1.2　時刻 t における個体数の平均値は,

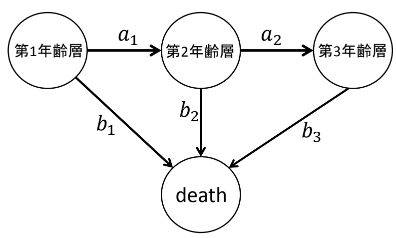
$$\mathbf{E}\left[X(t) \mid X(0)=1\right] = \mathrm{e}^{(f-g)t}$$

で与えられる.

2　出生死亡過程の一般化

2.1　3 個の年齢層をもつ場合の死亡過程

$a_i > 0$ を第 i 年齢層から第 $i+1$ 年齢層への成長レート, $b_i > 0$ を第 i 年齢層からの死亡レート, $\gamma_1 = a_1 + b_1$, $\gamma_2 = a_2 + b_2$, $\gamma_3 = b_3$ とする.



$X_i(t)$ を第 i 年齢層での個体数とし, 確率ベクトル $X(t)$ を

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix}$$

とする. 求める確率は,

$$p_0(t) = P\left(X(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$p_1(t) = P\left(X(t) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$p_2(t) = P\left(X(t) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$p_3(t) = P\left(X(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

Theorem 2.1　γ_1, γ_2, γ_3 はそれぞれ相異なるものとする. $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= 1 - p_1(t) - p_2(t) - p_3(t)\\
p_1(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma_1 t},\\
p_2(t) &= -\frac{a_1}{\gamma_1 - \gamma_2}(\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} - \mathrm{e}^{-\gamma_2 t}),\\
p_3(t) &= \frac{a_1 a_2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)}\left(\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} - \mathrm{e}^{-\gamma_3 t}\right)\\
&\quad -\frac{a_1 a_2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)}\left(\mathrm{e}^{-\gamma_2 t} - \mathrm{e}^{-\gamma_3 t}\right)
\end{aligned}$$

Theorem 2.2　絶滅時間を

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0; X(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

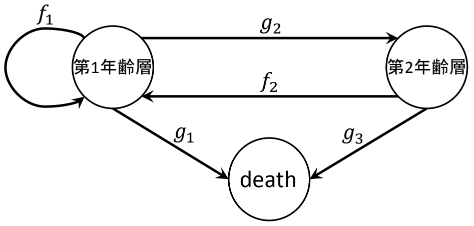
で定義すると, 平均寿命は,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\tau \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]\\
&= \int_0^{+\infty} (p_1(t) + p_2(t) + p_3(t))dt\\
&= \frac{1}{\gamma_1} + \frac{a_1}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{a_1 a_2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}
\end{aligned}$$

で与えられる.

2.2　2 つの年齢層に分割した出生死亡過程

各年齢層がさらに子供を産む場合を考える. ただし, ある生物集団の個体は, 年齢層を 2 つだけもつものとする.



X_i を第 i 年齢層での個体数とし, 確率ベクトル $X(t)$ を

$$X(t) = \begin{bmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{bmatrix}$$

とする. 初期条件は,

$$P\left(X(t) = \begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}\right) = \begin{cases}1 & (m=1, n=0)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

である. 母関数 $\phi(x,y,t)$ を

$$\phi(x,y,t) = \sum_{m,n\geq 0} p_{m,n}(t) x^m y^n$$

とし, 求める確率は,

$$p_{m,n}(t) = P\left(X(t) = \begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} \middle| X(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

である.

Lemma 2.3　$p_{m,n}(t)$ の母関数 $\phi(x,y,t)$ の偏微分方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= (f_1 x^2 - (f_1 + g_1 + g_2)x + g_1 + g_2 y)\frac{\partial \phi}{\partial x}\\
&\quad + (f_2 xy - (f_2 + g_3)y + g_3)\frac{\partial\phi}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\phi(x,y,0) = x$$

を満たす.

今後の課題

(1) Lemma 2.3 において, $f_2 = g_2 = g_3 = 0$ とおくと, Theorem 1.1 の導出過程において登場した母関数と一致する.

(2) $p_{m,n}(t)$ も Theorem 1.1 と同様に求めようとした.

(3) しかし, Lemma 2.3 には, x, y の相互作用項や非線形項が含まれてしまうので解くのが困難を極める.

参考文献

[1] B. A. セバスチヤノフ (長澤正雄訳): 分岐過程, 産業図書, 1976.

[2] Pierre Bremaud: Markov Chains, Springer, 1999.

[3] Manuel O.Cceres, Iris Cceres-Saez: Random Leslie matrices in population dynamics, Journal of Mathematical Biology 63(2011), 519-556,

[4] 尾畑伸明: 確率モデル要論, 確率論の基礎からマルコフ連鎖へ, 牧野書店, 2012.

[5] 熊ノ郷準: 偏微分方程式, 共立出版, 1978.

[6] 藤曲哲郎: 確率過程と数理生態学, 日本評論社, 2003.

[7] 宮沢政清: 待ち行列の数理とその応用, 牧野書店, 2006.