

量子確率論への招待

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科

尾畑 伸 明

はじめに

一つ一つの事象を見るとばらばらで何の関係もなさそうなのに、多くの事象が積み上がってゆくと規則性が現れてくる、そんな経験を持つ人は多いはずだ。コインを投げて表が出るか裏が出るかというのは、1回毎に見たのでは「やってみなけりゃ分らない」のだが、100回、1000回、10000回と振り続ければ表あるいは裏の出る相対頻度はおよそ $1/2$ に近づくことが観察できる。だから、くじ引きで当番を決めるにしても、何度も繰り返せば結局、公平に当番が当たってくる。コーヒーに角砂糖を沈めれば、そのうち解けて全体に一樣に広がるだろう。砂糖分子はそれぞれランダムに動き回っているのだからである。このような「偶然現象」を広く自然科学や社会科学の中に探し求めて、解析する数学が「確率論」である。

ところで、確率論と聞いてすぐに思い浮かぶのは Kolmogorov が有名な著書 [9] において定式化したもので、それは測度論 (と Lebesgue 積分論) に基づいているので「測度論的確率論」とも呼ばれる。理論の出発点は、良く知られているように、抽象的な集合 Ω 、その部分集合のつくる σ -加法族 \mathcal{F} 、及び \mathcal{F} 上で定義される σ -加法的な集合関数 P で $P(\Omega) = 1$ となるもの (確率測度) から成る三つ組 (Ω, \mathcal{F}, P) であり、これを確率空間と呼ぶ。 Ω は根元事象の全体、あるいは統計母集団を表す。 \mathcal{F} の元を事象と呼び、事象 $S \in \mathcal{F}$ の生起する確率が $P(S)$ で与えられると考える。可測関数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を (実) 確率変数と呼ぶが、これは根元事象の観測値を表している。その観測値の期待値 (平均値) は

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

で与えられ、分散 $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$ が観測値のゆらぎの大きさを表す。この意味の確率論はいわゆる数理統計学と表裏をなすものであり、統計事象の解析にはなくてはならないものとなっている。コインを振り続けたとき表の出る相対頻度が $1/2$ に近づく現象は、確率論の「大数の法則」として証明される。さらに、コインがイカサマかどうかを検定するためには、もう一段詳しく、相対頻度の分布を議論することも重要である。その分布は正規分布 (Gauss 分布) に近づくのだが、これが De Moivre–Laplace の定理であり「中心極限定理」の原型である。

ところで、今世紀初頭に誕生した量子力学において、波動関数の統計解釈は幾多の論争を巻き起こして今日に至っている。実際、教科書の冒頭に良く出てくるように、量子力学は測度論的確率論で記述できない問題を含んでいる。電子を一発ずつ飛ばすことができる最近の技術を用いて、有名な 2 重スリットの実験を行うと、多数の電子を飛ばした結果として干渉縞が得られることがわかる¹⁾。無相関に飛ばされた個々の電子が、結果的にはお互いの位置関係

¹⁾ 写真と簡単な解説は外村 [17] にある。並木美喜雄氏 (早稲田大学) の集中講義 (1993 年 5 月, 於物理学科) の折りに見たビデオの驚きは忘れられない。それにしても、Feynman が彼の有名な教科書 (原著 1965) の中で、「諸君はこの実験を実行しようと準備にかかってはいけない。… われわれは、… 思考実験をしているのである」と述べているのも今は昔であって、昨今ではこのような量子力学の原理的問題の実験的検証が可能になってきたのである。実際、電子は毎秒 10 個程の割合で発射されるが、発射されてからスクリーンに当たるまでに 10^{-8} 秒ほどしかかからないそうである。

を知っていたかのように規則性を生み出すのである。このような事象の解析もまた、正しく確率・統計の本分とするところであろう。確率論で面白いのは、ランダムな事象列の中に見い出される規則性のようなものなのだ。

量子力学における統計の問題を扱うことを動機として発展してきた確率論を「量子確率論」と呼んでいる。量子力学においては、観測量(observable)はある Hilbert 空間の自己共役作用素 A で与えられ、ある状態(state)における観測値はそのスペクトルで記述される。特に、純粋状態はその Hilbert 空間の単位ベクトル ξ で表され、 A を ξ において観測したときに得られる期待値は $\langle A\xi, \xi \rangle$ で与えられるとされる²⁾。こうして、2重スリットの実験で観察される干渉縞が説明できるようになった。別の面白い例として Bell 不等式があるので、興味ある読者は [4], [5] を参照されたい。それによって、光子が偏光フィルターを通過する事象は測度論的確率論では説明できず、量子確率が必要であることが分るだろう。

本稿の目的は、中心極限定理の「量子確率版」をグラフ上のランダムウォークを通して紹介することにある。ここでは、一般論は述べず(一般論というべきものはまだないのだ)2つの典型的な例によって、問題の本質を垣間見たい。その典型例とは、グラフの形状で言えば、正方格子(lattice)と樹木(tree)、群の言葉では、自由生成の可換群 \mathbb{Z}^N と自由群 F_N である。群の可換性という観点からは両極に位置していることに注目して欲しい。我々は、何らかの意味で(ここでは群の)可換性をもつ対象は古典的確率論が支配し、非可換なものは量子確率論が対応するという図式を念頭においている。しかしながら、一口に非可換と言っても「非可換度」は様々であり、そのことは量子確率論における「独立性」に様々な可能性を与えている。逆に言うと、唯一揺るぎなく確立している測度論的確率論の場合に比して未開拓の問題が山積しているということである。当然、独立性の概念と密接に関係する中心極限定理においてもそうであり、量子確率論にける重要な研究テーマになっている。本稿で扱う樹木=自由群上のランダムウォークは、Voiculescu–Dykema–Nica [18] によって「自由独立性」として抽象化され、様々な応用が期待されている。

この拙文を通して、読者の関心が多少とも量子確率論に向けば、筆者にとって望外の喜びである。現在では量子確率論の守備範囲は量子物理をはじめ、情報理論や通信工学への応用も含めて急速に広っており、色々な観点からアプローチすることが可能になってきている。Accardi [1] による一連の論文集はこの方面では最も重要な文献である。Belavkin–Hirota–Hudson [2] は量子情報理論に関する国際会議の報告集、この関連では大矢–小嶋 [14], Ohya–Petz [15] などで論じられている話題も興味深い。Mehta [10] に詳しく論じられているランダム行列の問題に対しても量子確率論のアイデアが有効である(Voiculescu–Dykema–Nica [18] も見よ)。また、散逸量子系(開放系)を記述する量子ノイズや量子的 Langevin 方程式が「量子確率解析」の名の下で盛んに研究されている。その数学的側面は、伊藤清以来の伝統的な確率解析の量子版である。これについては、Gardiner [7], Meyer [11], Obata [12], [13], Parthasarathy [16] などを参照されたい。さらに言えば、最初に述べた観点から「統計」の問題は様々であるし、その数学的基礎としての確率論の形態も一つや二つではないだろうと想像される。測度論的確率論や量子確率論を特別なものとして含むような大きな議論があっても面白いような気がするのだが、これは独り言...

²⁾ ちなみに、量子力学が Hilbert 空間論で定式化されることを初めて明らかにしたのは von Neumann [19] である。

1 量子確率論における基礎概念

1.1 C*-確率空間

いささか天下りではあるが、作用素環論を基礎にした定義を述べて話を進めよう。

定義 \mathcal{A} が単位元 1 をもつ C*-環、 ϕ がその状態 (state) であるとき、組 (\mathcal{A}, ϕ) を C*-確率空間であるという。任意の $a \in \mathcal{A}$ を確率変数といい、 $\phi(a)$ をその平均値 (期待値) という。

少し補足する。 \mathcal{A} が C*-環であるとは、複素 Banach 空間であると同時に複素数体 \mathbb{C} 上の多元環 (algebra) であり、 \mathcal{A} からその上への写像 $a \mapsto a^*$ で、

$$(a^*)^* = a, \quad (\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathcal{A}$$

をみたすもの (対合 = involution) が与えられ、さらに

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \|a^* a\| = \|a\|^2, \quad a, b \in \mathcal{A}$$

をみたすときにいう。なお、本稿を通じて C*-環は単位元を持つものだけ、C*-部分環は、単位元がもとの C*-環の単位元と一致するものだけを考える。次に、線形関数 $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ が $\phi(1) = 1$ かつ任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(a^* a) \geq 0$ を満たすときに \mathcal{A} 上の状態であるという。この条件だけで、状態 ϕ は \mathcal{A} 上の連続線形汎関数になることが証明される。確率変数については、測度論的確率論において値域を一般の空間に取ることができるように、もっと一般的な定義も可能であるが立ち入らない ([11] などを見よ)。

Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の有界線形作用素全体を $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ で表す。 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ は、恒等作用素を単位元とする \mathbb{C} 上の多元環になる。ノルム (作用素ノルムという) は

$$\|a\| = \sup\{\|a\xi\|; \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\}, \quad a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}),$$

で与えられ、対合 $a \mapsto a^*$ は

$$\langle a^* \xi, \eta \rangle = \langle \xi, a \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}, \quad a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}),$$

で定義される (a^* を a の共役作用素という)。以上の構造によって、 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ は C*-環になる。次に、 $\xi_0 \in \mathcal{H}$ を単位ベクトルとして、

$$\phi(a) = \langle a \xi_0, \xi_0 \rangle, \quad a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}), \quad (1.1)$$

とおくと、 ϕ は状態になる。実際、線形性は明らかであり、

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \langle 1 \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \|\xi_0\|^2 = 1, \\ \phi(a^* a) &= \langle a^* a \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle a \xi_0, a \xi_0 \rangle = \|a \xi_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

こうして、 $(\mathbf{B}(\mathcal{H}), \phi)$ は C*-確率空間となる。また、上のようにして得られる ϕ を ξ_0 におけるベクトル状態という。

次に、ベクトル状態 (1.1) をちょっと書き直してみよう。行列の対角成分の和 (固有値の和に一致する) をトレースということは線形代数で既知であろう。Hilbert 空間上の作用素 a に対してもトレースが考えられる。つまり、 $\{e_n\}$ を \mathcal{H} の正規直交基底として、

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_n \langle ae_n, e_n \rangle \quad (1.2)$$

と定義する。ただし、 \mathcal{H} が無限次元になると収束の問題が出てくるので、(1.2) の右辺が正規直交基底 $\{e_n\}$ の取り方によらず絶対収束するような a だけを考える。そのような a を核型作用素またはトレースクラスの作用素という。さて、 P を ξ_0 で張られる 1 次元部分空間への直交射影とする:

$$P\xi = \langle \xi, \xi_0 \rangle \xi_0, \quad \xi \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

すると簡単な計算から

$$\phi(a) = \langle a\xi_0, \xi_0 \rangle = \mathrm{Tr}(Pa), \quad a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}),$$

がわかる。ここで a が一般の作用素でも Pa は核型作用素になることに注意しておこう。

もっと一般に考えることもできる。非負の核型作用素で $\mathrm{Tr} \rho = 1$ なるものを (物理学の用語であるが) 密度行列と呼ぶ。このとき、 ρ のスペクトルは固有値だけからなり、それらはすべて非負であって総和が 1 になる。例えば (1.3) の 1 次元直交射影 P は密度行列である。さて、密度行列 ρ に対して

$$\phi(a) = \mathrm{Tr}(\rho a), \quad a \in \mathbf{B}(\mathcal{H}),$$

として定義される ϕ は $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ 上の状態になる。正值性は

$$\phi(a^*a) = \mathrm{Tr}(\rho a^*a) = \mathrm{Tr}((a\rho^{1/2})^*(a\rho^{1/2})) \geq 0$$

からもわかる。

さらに、作用素ノルムに関して閉じている $*$ -部分環で恒等作用素を含むものは自然に C^* -環となる。そのような C^* -環を \mathcal{A} として、上で述べた状態をそのような部分環に制限することによって C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) が得られる。このとき、 $\rho \in \mathcal{A}$ である必要はない。

1.2 可換 C^* -確率空間

一般に、compact Hausdorff 空間 Ω 上の複素数値連続関数の全体 $C(\Omega)$ を考えよう。各点毎の代数演算、ノルム

$$\|\xi\| = \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|, \quad \xi \in C(\Omega),$$

および対合

$$\xi^*(\omega) = \overline{\xi(\omega)}$$

によって $C(\Omega)$ は可換な C^* -環になる。なお、単位元は恒等的に 1 を取る関数である。実は、可換な C^* -環はこのようなものに限られる。

定理 1.1 (Gelfand–Naimark) 可換な C^* -環 \mathcal{A} に対して、compact Hausdorff 空間 Ω が存在して、 \mathcal{A} と $C(\Omega)$ が等距離 $*$ -同型となる。このような compact Hausdorff 空間は同相を除いて一意に定まる。

上の定理の Ω は、例えば、 \mathcal{A} の極大イデアルの全体として構成される。そうすると、 \mathcal{A} 上の任意の状態 ϕ は、 $C(\Omega)$ 上の連続線形汎関数とみなせる: $\phi \in C(\Omega)^*$ 。一方で、Riesz の表現定理によって、 $C(\Omega)^*$ は、積分を通じて Ω 上の複素数値の正則 Borel 測度全体と一致することが知られている。よって、状態 ϕ に対しては、正則 Borel 確率測度 P が対応し、

$$\phi(a) = \int_{\Omega} \hat{a}(\omega) P(d\omega), \quad a \in \mathcal{A}. \quad (1.4)$$

ここで、等距離 *-同型写像 $\mathcal{A} \cong C(\Omega)$ を $a \mapsto \hat{a}$ とおいた (Gelfand 写像)。こうして、可換な C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) は測度論的確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を誘導することが判る。(1.4) の右辺は、測度論的確率空間における平均値である。

逆に、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) が与えられたとき、 $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える。任意の $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はかけ算作用素として \mathcal{H} 上の連続作用素となる。この対応を $f \mapsto M_f$ とかき、このようなかけ算作用素の全体を \mathcal{A} とする。 $\mathcal{A} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ は C^* -部分環である³⁾。さらに、 \mathcal{H} の単位ベクトル $\xi_0(\omega) \equiv 1$ におけるベクトル状態を ϕ として、可換な C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) が得られる。このとき、

$$\mathbf{E}(f) = \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \langle M_f \xi_0, \xi_0 \rangle = \phi(M_f), \quad f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

が成り立つ。

こうして、 C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) において

$$\mathcal{A} \text{ が可換環} \iff \text{古典論} \qquad \mathcal{A} \text{ が非可換環} \iff \text{量子論}$$

という「標語的な」対応が確立される。むろん、非可換なものを何でも (物理が背後にある) 量子論という言い方に異義があるのも事実であるが、我々はこの意味で量子確率論という言葉を使っている。

1.3 確率分布

測度論的確率論において、実確率変数が与えられたとき、それによって誘導される \mathbb{R} 上の確率測度をその確率変数の分布という。一般に \mathbb{R} 上の確率測度 ν が与えられたとき、

$$M_n(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x^n \nu(dx), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

を ν の n 次モーメントという。もとよりモーメントは必ずしも存在するとは限らないが、大雑把には、分布は確率変数のモーメントで定まると考えて良いのである。

このことを念頭に置いて、一般の C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) に戻ろう。確率変数 $a \in \mathcal{A}$ の n 次モーメントを

$$M_n(a) = \phi(a^n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad M_0(a) = \phi(1) = 1,$$

によって定義する。 $M_1(a) = \phi(a)$ は a の平均値である。我々は、このモーメント列をもって a の分布と理解しよう。したがって、

$$\mu(p) = \phi(p(a)), \quad p \in \mathbb{C}[X],$$

³⁾ 実は、作用素弱位相で閉じているので、von Neumann 環と呼ばれるものになっている。von Neumann 環は C^* -環の特別なものである。

で定まる $\mathbb{C}[X]$ 上の線形関数 μ を a の分布ということにする.

特に, 自己共役な確率変数 $a = a^* \in \mathcal{A}$ の分布は, \mathbb{R} 上の compact support を持つ確率測度を誘導する. 実際, a で生成される C^* -部分環は可換なので, 定理 1.1 を適用して, 測度論的確率空間 (Ω, P) を構成する. 実確率変数 \hat{a} の分布 $\nu = \nu_a$ は \mathbb{R} 上の確率測度となり,

$$\phi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \nu(dx), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

が成り立つ. $|\hat{a}(\omega)| \leq \|\hat{a}\| = \|a\|$ であるから, $\text{supp } \nu_a \subset [-\|a\|, \|a\|]$ である. さらに, Weierstrass の多項式近似定理によって, compact support をもつ \mathbb{R} 上の確率測度 ν で (1.5) を満たすものは一意的である.

1.4 古典中心極限定理

ここで, 本題へのつなぎとして, 中心極限定理を軽く復習しておこう. 平均 m , 分散 σ^2 をもつ Gauss 分布 (正規分布) を, 慣例によって $N(m, \sigma^2)$ で表す. 分布密度は,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられる. さて, X_1, X_2, \dots を独立, 同分布を持つ確率変数列とし, その平均を m , 分散を σ^2 とする:

$$\mathbf{E}(X_k) = m, \quad \mathbf{E}((X_k - m)^2) = \sigma^2.$$

(これらが存在することは仮定のうちである.) このとき,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) \quad (1.6)$$

の確率分布は, $N \rightarrow \infty$ で $N(m, \sigma^2)$ に近くなるというのが, 中心極限定理のエッセンスである. X_k に代えて,

$$Y_k = \frac{X_k - m}{\sigma}$$

を考えれば, やはり独立, 同分布を持つ確率変数列となるが, 平均は 0, 分散は 1 となる. これを正規化された確率変数と呼ぼう.

定理 1.2 (中心極限定理) X_1, X_2, \dots を独立, 同分布を持つ正規化された確率変数列とし,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + X_2 + \dots + X_N)$$

とおく. このとき, T_N の分布は $N \rightarrow \infty$ で $N(0, 1)$ に法則収束し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(a \leq T_N \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx, \quad a < b,$$

が成り立つ.

但し、 \mathbb{R} 上の確率測度列 μ_n が別の μ に法則収束するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx), \quad f \in C_c(\mathbb{R}),$$

が成り立つことを言う。ここで $C_c(\mathbb{R})$ はコンパクト台をもつ連続関数の全体であるが、これを有界関数全体 $C_b(\mathbb{R})$ で置き換えても同値な条件である。上の定理の原型は、二項分布 $B(N, p)$ は、 N が大きいとき同じ平均と分散をもつ Gauss 分布、すなわち $N(pN, p(1-p)N)$ に近いことを主張する De Moivre-Laplace の定理である。今日では、確率分布の「近さ」に関する議論や同分布でない場合も含めて様々な形で精密化されている。ここでは、モーメントとの関連を一つだけ注意しておこう。

命題 1.3 μ_1, μ_2, \dots, μ を \mathbb{R} 上の確率測度で任意次数のモーメントを持つものとする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x^j \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^j \mu(dx), \quad j = 1, 2, \dots,$$

かつ

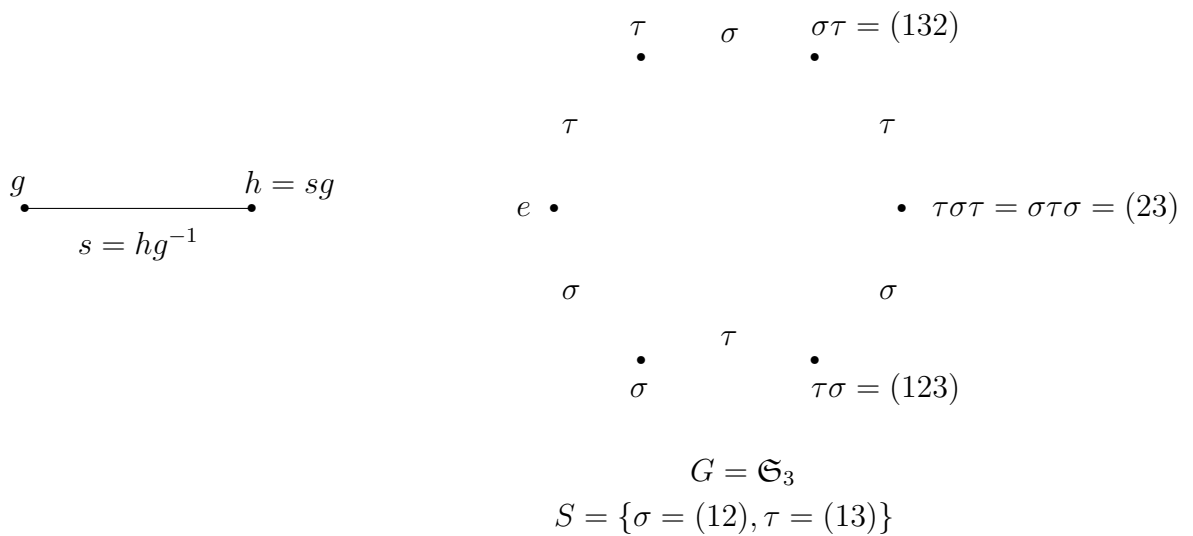
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^j \mu(dx) \right)^{-1/j} = \infty \tag{1.7}$$

が成り立てば、 μ_n は μ に法則収束する。

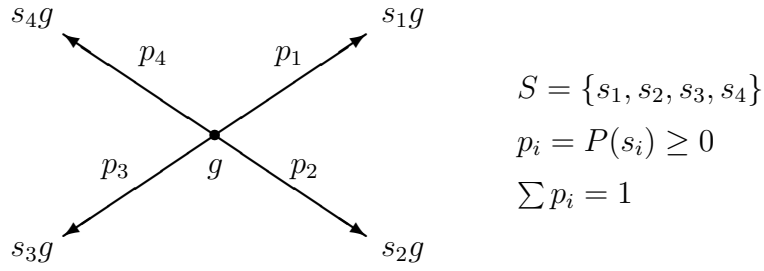
2 量子中心極限定理

2.1 グラフ上のランダムウォーク

G を e を単位元とする離散群、 $S \subset G$ をその部分集合で $e \notin S$ かつ $s \in S \implies s^{-1} \in S$ を満たすものとする。このとき、 (G, S) は自然にグラフの構造を持つ。すなわち、 G の元が頂点であり、 $(g, h) \in G \times G$ が $hg^{-1} \in S$ を満たすときに辺であるとするのである。



S 上に確率測度 P を与えることによって、グラフ (G, S) 上にランダムウォークが定まる。



このランダムウォークを Hilbert 空間上の作用素で表現しよう. まず,

$$\mathcal{H} = \ell^2(G) = \left\{ \xi : G \rightarrow \mathbb{C}; \|\xi\|^2 \equiv \sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 < \infty \right\}$$

とおけば,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{g \in G} \xi(g) \overline{\eta(g)}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

を内積とする Hilbert 空間になる. 各 $g \in G$ に対して

$$(U(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad h \in G, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

とおくと, $U(g)$ は \mathcal{H} 上のユニタリ作用素になり, 対応 $g \mapsto U(g)$ は群の準同型になる. このとき, 組 (U, \mathcal{H}) は G の (左) 正則表現と呼ばれる.

$$L = \sum_{s \in S} P(s)U(s) \tag{2.1}$$

とおくと, $L \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ であり, ランダムウォークの情報をすべて含んでいるといえる. この L を (G, S, P) のラプラシアンと呼ぶ.

一般にラプラシアンのスペクトルは, ランダムウォークの性質やグラフの幾何学を反映するので, 様々な観点から盛んに研究されている. 我々は量子確率的にアプローチするのだが, そのために C^* -環を準備する. $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ を考えても良さそうであるが, むしろ $\{U(g); g \in G\} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ の生成する C^* -環 (有限群の群環の自然な拡張) を考えるのが自然である. その理由は, 例えば §2.3 後半の議論から察することができる. そのような C^* -環を $C_r^*(G)$ で表す. もちろん $L \in C_r^*(G)$ となる. 次に \mathcal{H} の単位ベクトル ξ_0 を

$$\xi_0(g) = \begin{cases} 1, & g = e, \\ 0, & g \neq e, \end{cases}$$

で定めて, 対応するベクトル状態を ϕ とおく. 我々は, ラプラシアン L の挙動を C^* -確率空間 $(C_r^*(G), \phi)$ で調べてゆくことになる.

2.2 何を問題にするのか

(G, S) は今まで通り離散群 G から作られるグラフとするが, 今後はさらに, (i) S は有限集合; (ii) $s \in S \implies s \neq s^{-1}$; (iii) P は S 上の一様測度; の場合に限定して話を進めてゆこ

う. 仮定 (ii) は, 単に細かい場合分けを避けるためにおいた⁴⁾. また (iii) によって考えるランダムウォークは等質かつ対称になる.

さて, 簡単のため,

$$S = \{e_{\pm 1}, e_{\pm 2}, \dots, e_{\pm N}\}, \quad e_k^{-1} = e_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

と書くことにしよう. まず,

$$X_k = \frac{U(e_k) + U(e_{-k})}{\sqrt{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

とおくと, $X_k^* = X_k$, $\phi(X_k) = 0$, $\phi(X_k^2) = 1$ である. 実際, 例えば,

$$\begin{aligned} \phi(X_k^2) &= \frac{1}{2} \phi(U(e_k^2) + 2 + U(e_k^{-2})) \\ &= \frac{1}{2} \langle U(e_k^2)\xi_0, \xi_0 \rangle + 1 + \frac{1}{2} \langle U(e_k^{-2})\xi_0, \xi_0 \rangle \end{aligned}$$

と $e_k^2 \neq e$ を合わせて, $\phi(X_k^2) = 1$ が出る. したがって, X_k は正規化された実確率変数と言ってよかろう. これを用いると, グラフのラプラシアン (2.1) は

$$L = \frac{1}{2N} \sum_{s \in S} U(s) = \frac{1}{\sqrt{2}N} \sum_{k=1}^N X_k$$

となる. 本稿で問題とするのは, 大きな N に対する L の (量子確率的) 分布である. しかしながら, このままで $N \rightarrow \infty$ としても意味のある極限が得られないので, 実際には, スケーリングを施して,

$$T_N = \sqrt{2N} L = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k$$

を取り扱う. この表式は, §1.4 で述べた古典的中心極限定理の場合 (1.6) と形式的には同じである. 次節で述べるが, 実際, グラフが「古典論」に対応する場合には古典的中心極限定理と密接に関連する.

ところで, T_N の分布を調べるための手がかりは T_N のモーメント列にある. 実際, $\phi(T_N^n)$ を具体的に展開して計算することによって, $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\phi(T_N^n) = (2N)^{-n/2} \times \#\{e \text{ を始点かつ終点とする長さ } n \text{ の道}\} \quad (2.2)$$

が成り立つことが示される. T_N のモーメントがグラフ (G, S) の特性量で記述できるところが興味深い.

2.3 格子上的ランダムウォーク

可換群 \mathbb{Z}^N を考え, その標準的な基底を e_1, e_2, \dots, e_N とする. グラフ $(\mathbb{Z}^N, \{e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm N}\})$ が N 次元格子である. いま, 対称な等方的ランダムウォークに付随して,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k, \quad X_k = \frac{U(e_k) + U(e_{-k})}{\sqrt{2}},$$

⁴⁾ 例えば, $(G = \mathfrak{S}_n, S = \{(12), (13), \dots, (1, n)\})$ の場合 (§2.1 の図を参照) が除外される. ところで, 対称群上のランダムウォークは大変興味があるのだが, これまでのところあまり調べられてはいない.

を考える. 格子の原点を $e = (0, 0, \dots, 0)$ とし, e を始点かつ終点とする長さ n の道の個数は, n が奇数なら当然 0 であり, $n = 2m$ が偶数ならば,

$$\sum_{p_1 + \dots + p_N = m} \frac{(2m)!}{(p_1! \cdots p_N!)^2}$$

で与えられることが容易に判る. したがって, (2.2) によって,

$$\phi(T_N^n) = \begin{cases} 0 & n : \text{odd} \\ (2N)^{-m} \sum_{p_1 + \dots + p_N = m} \frac{(2m)!}{(p_1! \cdots p_N!)^2} & n = 2m : \text{even} \end{cases}$$

さて, $N \rightarrow \infty$ のときの挙動を考察しよう. 問題は, $n = 2m$ の場合だけである. また $N > m$ としよ. そのとき, 右辺は $p_1, \dots, p_N = 0$ or 1 の場合が主要項になり,

$$\phi(T_N^{2m}) = (2N)^{-m} \left(\binom{N}{m} (2m)! + O(N^{m-1}) \right) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{N!}{N^m (N-m)!} + O(N^{-1})$$

が得られる. よって,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi(T_N^n) = \begin{cases} 0 & n : \text{odd} \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & n = 2m : \text{even} \end{cases}$$

がわかる. これは, 標準 Gauss 分布 $N(0, 1)$ のモーメント列に一致する. よって, T_N の状態 ϕ の下で対応する分布は, $N \rightarrow \infty$ で $N(0, 1)$ に任意次数のモーメントが収束する意味で収束し, 命題 1.3 によって法則収束も従う. 言い替えれば, 作用素レベルで中心極限定理 (定理 1.2) を再現したことになる.

次に, 古典的中心極限定理との関係を述べておこう. 可換群 \mathbb{Z}^N の双対群は N 次元トーラス群 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$ であり, それぞれの群上の (Haar 測度に関する) L^2 -空間は Fourier 変換でユニタリ同型になる (Plancherel の定理). $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ の Fourier 変換は

$$\widehat{\xi}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \sum_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}} \xi(n_1, \dots, n_N) e^{2\pi i(n_1 \theta_1 + \dots + n_N \theta_N)}, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N,$$

で定義される. このとき, $U(e_k)$ の Fourier 変換 $\widehat{U}(e_k)$ は,

$$\begin{aligned} \widehat{U}(e_k) \widehat{\xi}(\theta_1, \dots, \theta_N) &= (U(e_k) \xi) \widehat{(\theta_1, \dots, \theta_N)} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}} \xi(n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_N) e^{2\pi i(n_1 \theta_1 + \dots + n_N \theta_N)} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}} \xi(n_1, \dots, n_k, \dots, n_N) e^{2\pi i(n_1 \theta_1 + \dots + (n_k + 1) \theta_k + \dots + n_N \theta_N)} \\ &= e^{2\pi i \theta_k} \widehat{\xi}(\theta_1, \dots, \theta_N) \end{aligned}$$

から, $e^{2\pi i\theta_k}$ によるかけ算作用素となる. よって, X_k の Fourier 変換 \widehat{X}_k は

$$\frac{e^{2\pi i\theta_k} + e^{-2\pi i\theta_k}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos 2\pi\theta_k \quad (2.3)$$

によるかけ算作用素となる. 実は, 任意の $Y \in C_r^*(\mathbb{Z}^N)$ の Fourier 変換は $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$ 上の連続関数 $\widehat{Y} = \widehat{Y}(\theta_1, \dots, \theta_N)$ によるかけ算作用素になる. 一方で, $\widehat{\xi}_0 \equiv 1$ であるから, Fourier 変換を通して, 状態 ϕ は

$$\widehat{\phi}(\widehat{Y}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \widehat{Y}(\theta_1, \dots, \theta_N) d\theta_1 \cdots d\theta_N, \quad Y \in C_r^*(\mathbb{Z}^N),$$

で与えられる. つまり, Fourier 変換を通して,

$$(C_r^*(\mathbb{Z}^N), \phi) \iff ((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N, d\theta_1 \cdots d\theta_N)$$

のように C^* -確率空間と測度論的確率空間の間に対応関係が確立された. 特に, (量子的) 確率変数 X_k は (2.3) より測度論的確率変数

$$\widehat{X}_k(\theta_1, \dots, \theta_N) = \sqrt{2} \cos 2\pi\theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

を誘導する. それぞれの \widehat{X}_k は θ_k のみの関数なので, 直積測度に関して $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_N$ は独立になる. こうして, 中心極限定理 (定理 1.2) が適用できる条件が整い,

$$\widehat{T}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \widehat{X}_k$$

の分布は, $N \rightarrow \infty$ で $N(0, 1)$ に法則収束することがわかる.

問 確率変数 X_1 の分布密度関数は

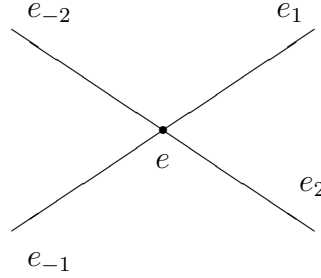
$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{2-t^2}}, & -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられることを示せ. この分布を (平均 = 0, 分散 = 1 に正規化した) 逆正弦法則あるいはパラメータ $(1/2, 1/2)$ の β -分布という.

我々は, 格子 \mathbb{Z}^N 上のランダムウォークに付随して, 中心極限定理を 2 通りの方法で示した. 後に述べた Fourier 変換の方法を見れば, 結局は, 古典中心極限定理の簡単な応用で求められることが判る. しかし, Fourier 変換が有効に用いられたのは, 群 \mathbb{Z}^N が局所コンパクト (実際は離散) 可換群であったからだ. 一方で, 第 1 の証明は, 群の可換性とは無関係であることに注意して欲しい. 逆に言えば, Fourier 変換を使わずとも, グラフ上のある種の道の個数を数えることで, 新しいタイプの中心極限定理が得られることが示唆される. これに関連した一例を次の節で論じよう.

2.4 自由群（樹木）上のランダムウォーク

$G = F_N$ を e_1, \dots, e_N で生成される自由群とする. 前節において議論した \mathbb{Z}^N は生成元 e_1, \dots, e_N に関係式 $e_k e_j = e_j e_k$ をいれて構成したものであるが, 自由群 G は関係式をもたない. 今までと同様に, $e_{-k} = e_k^{-1}$ という表記を用いることにして $S = \{e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm N}\}$ とおく. グラフ (G, S) を等質樹木 (homogeneous tree) という.



$$G = F_2 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad S = \{e_{\pm 1}, e_{\pm 2}\}$$

等質樹木 (G, S) 上に, 等質かつ対称なランダムウォークを考えて, §2.3 の議論を繰り返そう. つまり,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k, \quad X_k = \frac{U(e_k) + U(e_{-k})}{\sqrt{2}}$$

とにおいて T_N の $N \rightarrow \infty$ における分布を調べる. 再び, (2.2) を計算することになる.

一般の記法を導入しておこう. 樹木上で, e を始点として n ステップ後の到達点は, 第 k ステップでとった方向を $e_{i_k} \in S$ とすれば,

$$e_{i_n} e_{i_{n-1}} \cdots e_{i_2} e_{i_1}$$

と表すことができる. もし,

$$e_{i_n} e_{i_{n-1}} \cdots e_{i_2} e_{i_1} = e \tag{2.4}$$

となれば, これは e を始点として n ステップで e に戻る道筋を表している. 自由群の生成元の間にはいかなる関係式もないから, (2.4) が成り立つためには, n は偶数でなくてはならない. (樹木上で元の点に戻るには, 来た道を帰るしかない.) したがって, 特に, n が奇数ならば

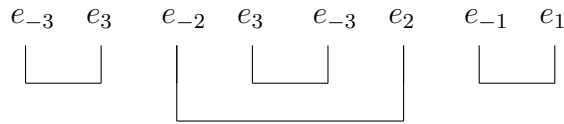
$$\phi(T_N^n) = 0, \quad n : \text{odd}. \tag{2.5}$$

問題は, $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, の場合である. さて,

$$e_{i_{2m}} e_{i_{2m-1}} \cdots e_{i_2} e_{i_1} = e \tag{2.6}$$

が成り立つためには, ここに現れている $2m$ 個の S の元のうち, e_k の個数と e_{-k} の個数は一致していなければならない. しかも, 生成元 e_1, \dots, e_N の間には可換性がないので, 並び方が制限される.

さて、(2.6) の道筋の各ステップに「行き」または「帰り」のラベルを付けよう. まず、第 1 ステップで e_{i_1} 方向に進んでいるが、これは無条件に「行き」としよう. e に戻ってくるまでに、必ず、頂点 e_{i_1} から e_{-i_1} 方向に進むステップがあるはずである. そのようなステップは複数存在するかも知れないが、最もステップの番号の若いものを e_{i_1} に対応する「帰り」とする. 次に、第 2 ステップ e_{i_2} を見る. これに「帰り」のラベルが付いていないときは、まず「行き」のラベルを付ける. これより後のステップの中に頂点 $e_{i_2}e_{i_1}$ から e_{-i_2} 方向に進むステップがあるはずである. そのようなステップのうち最もステップの番号の若いものを e_{i_2} に対応する「帰り」とする. もし、第 2 ステップ e_{i_2} にすでに「帰り」のラベルが付いているときは、これを飛ばして、第 3 ステップ e_{i_3} に対して同様の考察をする. この操作は m 回で終了し、(2.6) の道筋の各ステップに「行き」または「帰り」のラベルが付き、それぞれの 1 つずつが対応する. ここで大事なことは、対応するステップを \sqcup で記すと、これらは互いにクロスしないことである.



このような場合の数を数えるために、非交差対分割 (non-crossing pair partition) を導入すると便利である. $m = 1, 2, \dots$ を固定して考える. m 個の順序対 $\{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$ が $[1, 2m] = \{1, 2, \dots, 2m\}$ の非交差対分割とは、

- (i) $\{i_1, j_1, \dots, i_m, j_m\} = [1, 2m]$;
- (ii) $i_k < j_k, k = 1, 2, \dots, m$;
- (iii) 異なる (i_k, j_k) と $(i_{k'}, j_{k'})$ に対して $[i_k, j_k] \cap [i_{k'}, j_{k'}] = \emptyset, [i_k, j_k] \subset [i_{k'}, j_{k'}]$, または $[i_{k'}, j_{k'}] \subset [i_k, j_k]$ のいずれかが成り立つ.

$[1, 2m]$ の非交差対分割の個数を C_m で表し Catalan 数と呼ぶ.

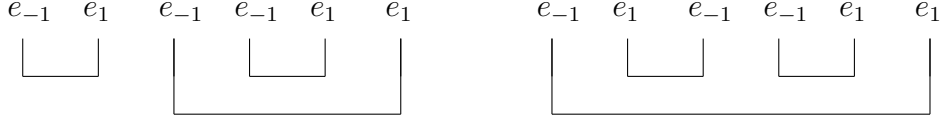
$$C_m = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}$$

となることが知られているが、証明は読者に委ねよう.

今、 $N > m$ の場合を考えることにする. 非交差対分割が 1 つ与えられているとして、それぞれの対に e_i と e_{-i} を与えれば、 e を始点として $2m$ ステップで e に戻る道が 1 つ得られる. そのような道のうちで、 e_1, \dots, e_N が高々 1 回しか現れない (つまり、 $2m$ ステップの内で同じ方向に 2 回以上は往復しない) ようなものの個数 P_N を数えれば、

$$P_N = \binom{N}{m} m! 2^m C_m = \frac{N!}{(N-m)!} 2^m C_m.$$

次に、そうでない道の個数 R_N を数える. この場合、非交差対分割が異なっても同じ道を与えることがある. 例えば、次の例を見よ.



したがって、非交差対分割ごとに道の個数を数えると、本当の個数より大きくなってしまう。しかし、我々の知りたい極限においては、本当の個数を知る必要はない。さて、1つ非交差対分割が与えられたとしよう。 m 個ある対に入れるべき S の元を k 種類、 $1 \leq k < m$ 、に限定する。まず、どの種類を用いるかで、

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

通りある。次にそれらを少なくとも1度は使って、非交差対分割の対にあてはめる。その場合の数は、

$$\sum_{p_1+\dots+p_k=m-k} \frac{m!}{(p_1+1)! \cdots (p_k+1)!} \leq \sum_{p_1+\dots+p_k=m} \frac{m!}{p_1! \cdots p_k!} = k^m$$

となる。あとは、各対毎に e_i と e_{-i} の入れ替えが可能であるから、結局、

$$R_N \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{N!}{(N-k)!k!} k^m 2^m C_m = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{N!}{(N-k)!k!} (2k)^m C_m. \quad (2.7)$$

こうして、

$$\begin{aligned} \phi(T_N^{2m}) &= (2N)^{-m} (P_N + R_N) \\ &= (2N)^{-m} \frac{N!}{(N-m)!} 2^m C_m + (2N)^{-m} R_N \\ &= \frac{N!}{N^m (N-m)!} C_m + (2N)^{-m} R_N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

を得る。(2.7) を用いれば、

$$\begin{aligned} (2N)^{-m} R_N &\leq (2N)^{-m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{N!}{(N-k)!k!} (2k)^m C_m \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{N^{m-k}} \frac{N!}{(N-k)!N^k} \frac{k^m}{k!} C_m \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

である。よって(2.8)から

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi(T_N^{2m}) = C_m = \frac{(2m)!}{(m+1)!m!}.$$

これと(2.5)をまとめると、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi(T_N^n) = \begin{cases} 0, & n : \text{odd} \\ \frac{(2m)!}{(m+1)!m!} & n = 2m : \text{even} \end{cases}$$

が得られた.

定義 \mathbb{R} 上の確率密度関数

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}, & |x| \leq 2, \\ 0 & |x| > 2, \end{cases}$$

によって定義される確率分布を (平均 = 0, 分散 = 1 に正規化された) 半円則⁵⁾ と呼ぶ.

そのモーメントは,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & n : \text{odd} \\ \frac{(2m)!}{(m+1)!m!} & n = 2m : \text{even} \end{cases}$$

で与えられる. また $\rho(x)dx$ は命題 1.3 の (1.7) を満たすことが容易に判る. そうすると, 樹木上のランダムウォークに付随して考えた確率変数 T_N の極限分布については次のように述べられる.

定理 2.1 T_N の状態 ϕ の下での分布は, $N \rightarrow \infty$ で半円則に法則収束する.

ところで, T_N の Green 関数を G_N としよう:

$$(z - T_N)^{-1} \xi(g) = \sum_{h \in G} G_N(g, h|z) \xi(h), \quad \xi \in \ell^2(G).$$

このとき, $\phi((z - T_N)^{-1}) = G_N(e, e|z)$ であり, それは Kesten [8] によって

$$\phi((z - T_N)^{-1}) = G_N(e, e|z) = \frac{(N-1)z - \sqrt{N^2 z^2 - 2N(2N-1)}}{2N - z^2}$$

となることが知られている. これを用いると, T_N の誘導する \mathbb{R} 上の確率測度 $\rho_N(x)dx$ が決定される.

$$\rho_N(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2N(2N-1) - N^2 x^2}}{\pi(2N - x^2)}, & |x| \leq \frac{\sqrt{2N(2N-1)}}{N}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで $N \rightarrow \infty$ とすれば, やはり半円則が得られることが確かめられる.

以上の議論を様々なグラフで試みるのは興味がある. 例えば, Aomoto-Kato [3] による巡回群の自由積⁶⁾ に対する Green 関数の研究や Biane [6] による対称群と半円則との関連などはヒントになるだろう.

⁵⁾ しばしば Wigner の名を冠して呼ばれる. Wigner は, 重い原子核の複雑なスペクトルを研究するためのモデルとしてランダム・マトリックスを導入したが, その固有値分布がこの半円則に従うのである. Wigner のあとを引き継いで精力的に研究したのは Dyson, Mehta 達である. 最近の話題については Mehta [10] を見よ.

⁶⁾ 自由群は \mathbb{Z} の自由積である.

2.5 自由独立性

前節で述べた, 自由群上のランダムウォークに付随した確率変数列 X_k のもつ特別な性質は, つぎのように抽象化されている.

定義 (Voiculescu) C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) の C^* -部分環の族 \mathcal{A}_i が自由独立 (free independent) であるとは, 隣同士が異なる任意有限の添字列 $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$ と任意の $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ で $\phi(a_k) = 0$ なるものに対して, $\phi(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$ となることである. 確率変数の列 $a_1, a_2, \cdots \in \mathcal{A}$ が自由独立であるとは, a_i の生成する C^* -部分環を \mathcal{A}_i とするとき, それらが自由独立になることである.

このとき, 中心極限定理は次のように定式化され, ある種のランダム行列の固有値分布を調べるのに応用された.

定理 2.2 (Voiculescu) C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) の正規化された実確率変数列 a_1, a_2, \cdots が自由独立であれば,

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k$$

の分布は, $N \rightarrow \infty$ の極限で半円則に法則収束する.

ここで, $a \in \mathcal{A}$ が正規化された実確率変数であるとは, $a = a^*$, $\phi(a) = 0$, $\phi(a^2) = 1$ が満たされていることを意味する. 証明は Voiculescu–Dykema–Nica [18] に簡潔に述べられているので, ここでは中心的な役割を果たす full Fock 空間と R-変換について説明して, 証明のあらすじのみを示す.

定義 Hilbert 空間 \mathcal{H} に対して,

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

を \mathcal{H} 上の full Fock 空間という. $\mathbb{C}\Omega$ は Ω を基底とする 1 次元の Hilbert 空間であって, Ω は真空ベクトルと呼ばれる.

物理で良く現れる Boson Fock 空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の代わりに対称テンソルを, Fermion Fock 空間は反対称テンソルをとったものである. Full Fock 空間の場合も, 既存の例にならって $h \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\begin{aligned} l(h)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) &= h \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \\ l^*(h)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) &= \langle h, \xi_1 \rangle \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \end{aligned}$$

とにおいて, h に付随する (左) 生成作用素, (左) 消滅作用素を導入する⁷⁾. $l(h), l^*(h) \in \mathbf{B}(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ であり

$$l^*(h_1)l(h_2) = \langle h_1, h_2 \rangle I, \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H},$$

⁷⁾ 記号 $l(h), l^*(h)$ は通常の Boson Fock 空間などにおけるものとは * のつき方が逆になっている. ここでは [18] に従ってこのままにしておく.

が成り立つ. 今, \mathcal{H} の完全正規直交基底を1つとって, $\{e_k\}$ として,

$$l_k = l(e_k), \quad l_k^* = l^*(e_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

とおく. \mathcal{A} を $\{l_1, l_1^*, l_2, l_2^*, \dots\}$ で生成される C^* -環とし, ϕ を真空 Ω に対応するベクトル状態とする. こうして, 我々は C^* -確率空間 (\mathcal{A}, ϕ) を手に入れた. ここで, 大事なことは, \mathcal{A}_k を $\{l_k, l_k^*\}$ で生成される \mathcal{A} の C^* -部分環とすると, $\{\mathcal{A}_k\}$ が自由独立になることである.

次に注意することは, 任意の確率分布 (§1.3) をもつ確率変数が (\mathcal{A}, ϕ) の中に存在することである.

補題 2.3 μ を $\mathbb{C}[X]$ 上の線形関数とする. このとき, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{C}$ をとって

$$T = l_1^* + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} l_1^k$$

とすると, $\phi(T^n) = \mu(X^n)$ が成り立つようにできる. このような $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{C}$ は一意的である.

証明は, μ のモーメント列から α_k を帰納的に定義してゆく. そうすると, $\mathbb{C}[X]$ 上の線形関数 μ に対応して, 形式巾級数が

$$R_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} z^k$$

として定義される.

定義 R_μ を μ の R -変換という. μ が確率変数 $a \in \mathcal{A}$ から得られているときは, R_μ を R_a とも書き, a の R -変換という.

R -変換の有用性は次のことによる.

命題 2.4 (\mathcal{A}, ϕ) を C^* -確率空間とする. 確率変数 $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ の R -変換を R_1, R_2 とする. a_1, a_2 が自由独立ならば, $a_1 + a_2$ の R -変換は $R_1 + R_2$ で与えられる.

まず, 自由独立な確率変数を full Fock 空間上に表現することで, full Fock 空間における l_1, l_2 に対する命題に帰着する. あとは直接の計算で証明が完成する. そうすれば, 定理 2.2 は容易に証明される. 実際, 自由独立な確率変数 a_1, a_2, \dots は仮定によって同分布を持つので, その R -変換は同一である. それを $R_1(z)$ と書くことにする. すると,

$$\begin{aligned} R_{(a_1+\dots+a_N)/\sqrt{N}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{N}} R_{a_1+\dots+a_N} \left(\frac{z}{\sqrt{N}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ R_{a_1} \left(\frac{z}{\sqrt{N}} \right) + \dots + R_{a_N} \left(\frac{z}{\sqrt{N}} \right) \right\} \\ &= \sqrt{N} R_1 \left(\frac{z}{\sqrt{N}} \right). \end{aligned}$$

a_1 の R-変換は, $\phi(a_1) = 0, \phi(a_1) = 1$ に注意すれば,

$$R_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n$$

の形を持つ. よって,

$$R_{(a_1+\dots+a_N)/\sqrt{N}}(z) = \sqrt{N} R_1\left(\frac{z}{\sqrt{N}}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{N^{(n-1)/2}} z^n,$$

ここで, $N \rightarrow \infty$ とすれば, $(a_1 + \dots + a_N)/\sqrt{N}$ の極限分布の R-変換は

$$R(z) = z$$

で与えられることがわかる. ところが, そのような R-変換を持つ分布は正規化された半円則なのである. R-変換と極限演算 $N \rightarrow \infty$ との交換など細かい技術的なことは省略したが, こうして, 自由独立性に関する中心極限定理 (定理 2.2) の証明が完成する. R-変換は古典中心極限定理における Fourier 変換の役割を演じているのである.

参考文献

- [1] L. Accardi (ed.): “Quantum Probability and Related Topics,” I–V, Lecture Notes in Math. Vol. 1055, Springer–Verlag, 1984; Vol. 1136, 1985; Vol. 1303, 1988; Vol. 1396, 1989; Vol. 1442, 1990; VI–IX, World Scientific, 1991, 1992, 1993, 1994.
- [2] V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson (eds.): “Quantum Communications and Measurements,” Plenum, 1995.
- [3] K. Aomoto and Y. Kato: *Green functions and spectra on free products of cyclic groups*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 59–85.
- [4] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger: *Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1804–1807.
- [5] J. S. Bell: *On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox*, Physics **1** (1965), 195–200.
- [6] P. Biane: *Permutation model for semi-circular systems and quantum random walks*, Pacific J. Math. **171** (1995), 373–387.
- [7] C. W. Gardiner: “Quantum Noise”, Springer–Verlag, 1991.
- [8] H. Kesten: *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 336–359.
- [9] A. N. Kolmogorov: “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,” Springer–Verlag, 1933. [根本伸司 訳: 『確率論の基礎概念』東京図書, 1975.]
- [10] M. L. Mehta: “Random Matrices,” Academic Press, 1991.
- [11] P. A. Meyer: “Quantum Probability for Probabilists,” Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.

- [12] N. Obata: “White Noise Calculus and Fock Space,” Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer-Verlag, 1994.
- [13] N. Obata (ed.): 『ホワイトノイズ解析と量子確率論』京都大学数理解析研究所講究録 **874**, 1994; 『ガウス空間上の作用素解析と量子確率論』同 **923**, 1995.
- [14] 大矢雅則・小嶋 泉: 『量子情報と進化の力学』数理情報科学シリーズ 12, 牧野書店, 1996.
- [15] M. Ohya and Petz: “Quantum Entropy and Its Use,” Springer-Verlag, 1993.
- [16] K. R. Parthasarathy: “An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,” Birkhäuser, 1992.
- [17] 外村 彰: 『量子力学を見る』岩波科学ライブラリー 28, 1995.
- [18] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema and A. Nica: “Free Random Variables,” CRM Monograph Series Vol. 1, AMS, Providence, 1992.
- [19] J. von Neumann: “Die Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik,” Springer-Verlag, 1932. [井上健・広重徹・恒藤敏彦訳: 『量子力学の数学的基礎』みすず書房, 1957.]