

第7章 ホワイトノイズ解析の新展開

尾畑伸明（東北大学大学院情報科学研究科教授）

§1 はじめに

ホワイトノイズ解析は、飛田による提唱 ([5] と引用文献を参照) に始まり、久保、竹中、横井、Kuo, Streit, Potthoff らによるホワイトノイズ超関数の構成と解析 (たとえば, [6, 16] と引用文献) に加えて、ホワイトノイズ作用素解析 [18, 19, 20] はその豊富な数学的構造を示してきた。とりわけ、一連の論文 [3, 4, 21, 22, 23] では、従来の古典および量子確率解析の枠組みを超える 1 つの試論として「量子ホワイトノイズ微分方程式論」を取り扱い、最近の潮流である無限次元解析と量子確率論の融合的研究を促した。

本研究では、新しい統合的な特徴づけ定理 [10], Bargmann–Segal 空間と複素ホワイトノイズの応用 [11], 量子ホワイトノイズ微分の導入と発展 [13, 15], Fourier–Gauss 変換における新しいユニタリ性の発見とその一般化 [12, 14], 量子ホワイトノイズ方程式における部分

ユニタリ解の発見 [2], などの成果をあげてきた。引き続き、(量子および古典) ホワイトノイズ微分方程式を柱とする「量子ホワイトノイズ解析」の構築に向けて継続研究中である。

本報告では、上に列挙した研究成果の解説を試みるのではなく、むしろ研究全体の背景と意義に重点をおく。つまり、ホワイトノイズが確率モデルの構成においてどのように現れ、その解析においてどのように生きているかを例示し、「量子ホワイトノイズ解析」に至るアイデアを紹介したい。

§2 確率過程

2.1 ランダム現象の確率モデル

サッカーやテニスの試合を開始するとき、コイン投げによって先攻・後攻を決める。コイン投げのエッセンスは、「結果が 2 通りあり、そのいずれもが同等の確からしさで起こる」ことにある。コイン投げの結果を表す変数を Z とする。コインの表裏を ± 1 とすれば、 Z の値は

± 1 のいずれかであって確定できないが、 $Z = +1$ と $Z = -1$ は同等の確からしさで起こることになる。つまり、 $Z = \pm 1$ の起こる確率はそれぞれ $1/2$ となる。このように確率を考え合わせた変数 Z を確率変数という。

毎日の天候の推移、人口の増減、株価や為替相場の変動などは、時々刻々と不規則に変動し確実に予測することはできない。このようなランダム現象に対して、合理的な予測をし、制御や意思決定を行うための数理解析は重要な研究課題である。ランダム現象において、ある時刻 t において観測された値を確率変数の実現値ととらえるのが我々の出発点である。そうすれば、時間とともに変動するランダム現象に対しては、時間パラメータ t をもつ確率変数の系列 $\{X(t)\}$ 、つまり確率過程を考えることになる。

時間パラメータのとり方に 2 通りある。ランダム現象を一定時間ごとに観測する場合は、確率変数の列 $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ でモデル化される。これを離散時間の確率過程という。現実世界では、時間間隔 Δt がいかほどに小さいにせよ、離散時間的な観測しかできないので、離散時間の確率過程を考えておけば十分であるともいえる。一方、時間を連続的に流れるものととらえれば、連続時間の確率過程 $\{X(t)\}$ が考察の対象になる。連続時間の確率過程に対しては、「確率解析」と呼ばれる無限変数の

微積分が適用できるため、その応用範囲は非常に広い。連続量を扱う微積分は強力な計算手段となる。

2.2 ベルヌイ確率変数列

同一のコインを繰り返し投げる試行において、 n 回目のコイン投げにあたる確率変数を Z_n とおく。その確率法則は一般性をもたせて、 $P(Z_n = +1) = p$ 、 $P(Z_n = -1) = q$ とする。ただし、 $0 \leq p, q \leq 1$ は $p + q = 1$ を満たす定数である。さらに、コイン投げは互いに影響を及ぼさないことを反映させて、確率変数列 $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ は独立であると仮定する。このような確率変数列を成功確率 p のベルヌイ確率変数列と呼ぶ。

ベルヌイ確率変数列 $\{Z_n\}$ の基本的な統計量を述べておく。平均値は、

$$E(Z_n) = p - q.$$

分散と共分散はひとまとめにして、

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_m, Z_n) &= E((Z_m - E(Z_m))(Z_n - E(Z_n))) \\ &= 4pq\delta_{mn} \end{aligned}$$

と書き表すことができる。特に、 $m \neq n$ のとき、 $\text{Cov}(Z_m, Z_n) = 0$ である。このことを、 Z_m と Z_n は無相関であるという。無相関は独立性からの帰結である。

2.3 ランダムウォーク

公平なコイン投げにしたがって直線上を運動する動点 (ランダムウォーカー

と呼ぼう) を考える. このランダムウォーカーは, 時刻 $t = 0$ において原点 0 から出発し, τ 秒ごとに公平なコインを投げて, 表 (H) が出たら正の方向に ϵ だけ移動し, 裏 (T) が出たら負の方向に ϵ だけ移動するものとする. 図 2.1 は, この動きの一例である.

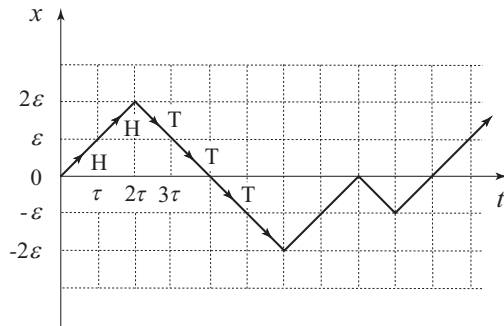


図 2.1 ランダムウォーク

時刻 $t = n\tau$ におけるランダムウォーカーの位置は, n 回のコイン投げの結果として定まるので確率変数である. これを X_n と書こう. 成功確率 $1/2$ のベルヌイ確率変数列を $\{Z_n\}$ とすれば,

$$X_n = \sum_{k=1}^n \epsilon Z_k \quad (2.1)$$

のように表される. 時刻 $t = n\tau$ における平均位置が

$$\mathbf{E}(X_n) = \epsilon \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(Z_k) = 0 \quad (2.2)$$

とわかる. 共分散は,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_m, X_n) &= \epsilon^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \text{Cov}(Z_j, Z_k) \\ &= \min\{\epsilon^2 m, \epsilon^2 n\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

特に, 分散は,

$$\mathbf{V}(X_n) = \epsilon^2 n. \quad (2.4)$$

2.4 ブラウン運動

ランダムウォークの見方を少し変えよう. 第 2.3 節では, コイン投げの時間間隔 τ を一定に保っていたが, 今度は τ をできるだけ小さくする. そのことを顕わにするために, $\tau = \Delta t$ と書き直す. さて, 単位時間当たりのコイン投げの回数を n とすれば, $n\Delta t = 1$ が成り立つ.

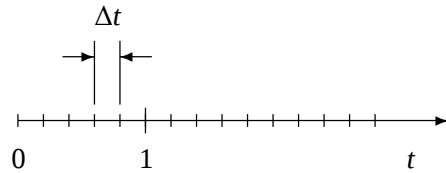


図 2.2 時間区間を微小区間に分割

そうすれば, 時刻 t におけるランダムウォーカーの位置は nt 回のコイン投げの積算として与えられることになる. このコイン投げの回数は, Δt のとり方によるので, そのことを明示して, 時刻 t におけるランダムウォーカーの位置を $X_{\Delta t}(t)$ と書く. こうして,

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{nt} \epsilon Z_k \quad (2.5)$$

が得られる.

興味の対象は, 関係 $n\Delta t = 1$ を保ったまま, $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ としたとき, (2.5) はどのような運動を表すかである. こ

で, $X_{\Delta t}(t)$ の分散

$$V(X_{\Delta t}(t)) = \epsilon^2 nt = \frac{\epsilon^2}{\Delta t} t$$

が極限において意味をもつためには,

$$\frac{\epsilon^2}{\Delta t} \rightarrow \alpha \text{ (定数)} \quad (2.6)$$

が成り立つ必要がある. 言い換えれば, コイン投げの時間間隔 Δt を狭くすると同時に, 1 回当たりのランダムウォーカーの移動距離 ϵ も小さくするのである. 時間と空間の軸をどのような比率で縮小すればよいかを示しているのが (2.6) である.

簡単のため以下では, (2.6) で $\alpha = 1$ とする. コイン投げの時間間隔を Δt として得られるランダムウォークを $X_{\Delta t}(t)$ とおく. 時間間隔を小さくして ($\Delta t \rightarrow 0$) 得られる極限のランダムウォーク

$$B(t) = \lim X_{\Delta t}(t) = \lim \sum_{k=1}^{nt} \epsilon Z_k \quad (2.7)$$

に興味がある. ただし, 極限をとるときには,

$$n\Delta t = 1, \quad \frac{\epsilon^2}{\Delta t} = 1 \quad (2.8)$$

をみたしたまま,

$$n \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

とする. このとき, 平均・分散・共分散の極限は, (2.2)–(2.4) からすぐわかる:

$$E(B(t)) = 0, \quad (2.10)$$

$$V(B(t)) = E(B(t)^2) = t, \quad (2.11)$$

$$\text{Cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\}. \quad (2.12)$$

また,

$$\begin{aligned} B(t) &= \lim \sqrt{\epsilon^2 nt} \times \frac{1}{\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^{nt} Z_k \\ &= \sqrt{t} \lim \frac{1}{\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^{nt} Z_k \end{aligned}$$

となるから, ド・モアブル-ラプラスの定理 (より一般には中心極限定理) によって, $B(t)$ は平均 0, 分散 t の正規分布 $N(0, t)$ に従う. さらに詳しい議論によって, ガウス過程 $\{B(t)\}$ が定まることが証明される. この $\{B(t)\}$ をブラウン運動またはウィナー過程と呼ぶ.

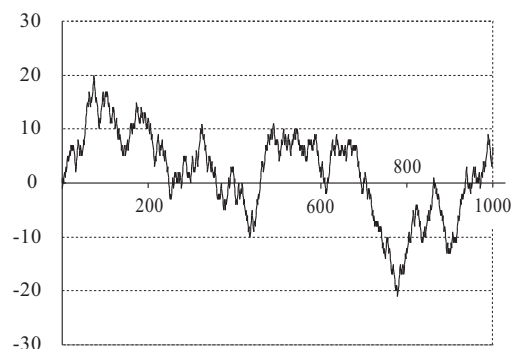


図 2.3 ブラウン運動のシミュレーション

ブラウン運動は, 離散時間の確率過程であるランダムウォークにおいて, 時間幅 Δt を極限まで小さくすることで得られる連続時間の確率過程である. したがって, ブラウン運動はある意味で理想化された世界に構成されたものといえる. ところが, その理想化された世界では, ブラウン運動に関する微積分とでも言うべき強力な計算手法 (伊藤解析に

代表される確率解析) が確立しており, 過去半世紀にわたりランダム現象の解析に飛躍的な進展をもたらして今日に至っているのである.

§3 ホワイトノイズ

3.1 ブラウン運動の速度

ランダムウォークが独立な確率変数の和 (2.1) で表されるのなら, ブラウン運動 $\{B(t)\}$ を各時点ごとに独立な何らかの確率過程で $\{W(t)\}$ を用いて

$$B(t) = \int_0^t W(s)ds \quad (3.1)$$

のように積分で表すことは可能だろうか? この $W(t)$ を (ガウス型) ホワイトノイズと呼ぶ. 微分積分学の基本定理からの類推すれば, (3.1) は,

$$\frac{dB(t)}{dt} = W(t) \quad (3.2)$$

といってもよい. 力学の言葉を使えば, ブラウン運動の速度がホワイトノイズである.

ところで, (2.1) からランダムウォークは, 確率差分方程式

$$X_n - X_{n-1} = \epsilon Z_n, \quad X_0 = 0, \quad (3.3)$$

によって特徴付けられることがわかる. 一方で, (3.1)–(3.2) からブラウン運動は微分方程式

$$\frac{dB(t)}{dt} = W(t), \quad B(0) = 0, \quad (3.4)$$

によって特徴付けられるべきものに見える. (3.4) は, 形式的には, (3.3) の差分を微分で, コイン投げをホワイトノイズで置き換えたものである.

式 (3.2) などでは, ホワイトノイズは単に $B(t)$ を t で微分して済む話に見えるが, そこには落とし穴がある. ブラウン運動 $B(t)$ はランダムウォークの極限である. 図 2.3 から想像たくましくすれば, その経路は連続であるが, 至る所でどんなに拡大してみてもジグザグになっていて, とがった点ばかりではなからうか. 実際, ブラウン運動は連続ではあるが, どの t においても微分不能であることが証明される. どんなに微小な時間区間でみても激しいジグザグ運動をしていることの現れとはいうものの, もはや, その姿を簡単に想像することはできない.

3.2 ホワイトノイズの統計的性質

ホワイトノイズは数学的对象として通常の微積分や確率論の範囲外にあることを見てきたが, ホワイトノイズに期待される統計的性質を述べることはできる. つまり, (3.1) という表現を素朴に認めて, $B(t)$ の統計的な性質を導くためには $W(t)$ はどのような性質をもつべきか? という問に答えようというわけだ.

まず, 平均値 (2.10) のために,

$$E(W(t)) = 0 \quad (3.5)$$

はよいだろう。次に、共分散 (2.12) のために、

$$E(W(s)W(t)) = \delta(s - t) \quad (3.6)$$

とする。ただし、右辺は s, t に関する 2 重積分を対角線 $s = t$ 上の積分に帰着させる演算記号とする (厳密には 2 変数の超関数として定義される)。最後に、 $B(t)$ がガウス過程となることを保証する性質として、関数 $f(t)$ に対して

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)W(t) dt$$

がガウス型確率変数 (通常の意味) になることを要求しよう。

以上を認めれば、確率変数の族

$$\{X(f); f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

は平均 0、共分散 $\text{Cov}(X(f), X(g)) = \langle f, g \rangle$ のガウス族になる。特に、ブラウン運動 $B(t)$ の積分表示 (3.1) は、時間区間 $[0, t]$ の指示関数 $1_{[0, t]}(s)$ を用いて、

$$B(t) = X(1_{[0, t]}) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0, t]}(s)W(s)ds$$

となる。これによって、積分表示 (3.1) が「正当化」された。(本当の正当化は第 5.2 節にある。)

しかしながら、ホワイトノイズは通常、確率変数ではありえず、関数概念を拡張した「超関数」を用いることで初めて正しい定式化が行われる。この意味で、ホワイトノイズ $W(t)$ は確率超過程なのである (第 5 節)。

3.3 ホワイトノイズの形式的適用

ブラウン運動でさえ理想郷にあるというのに、通常、確率論や微積分の枠外にあるホワイトノイズにかくもこだわる必然性はあるのだろうか? この疑問には最終節で答えることとして、ここでは、ホワイトノイズの効用について述べる。

モデル化したいランダム量について、ランダム性の発生メカニズムから各微小時間ごとに独立なノイズが加わっていると想定できる場合、ホワイトノイズが役に立つ。一例をあげよう。別の例は第 4.2 節にある。速度に比例する抵抗を受けて運動する質量 $m = 1$ の質点を考える。その速度を $v(t)$ とすれば、運動方程式は、

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t)$$

となる。 $\gamma > 0$ は比例定数である。この方程式は簡単に解けて、

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \quad (3.7)$$

が得られる (v_0 は初速度)。つまり、この質点の速度は指数関数的に減衰して停止することになる。

次に、この質点には絶え間なく各時点で独立な外力がノイズとして加わっているとすると、このような状況は典型的にホワイトノイズでモデル化され、速度 $V(t)$ の満たす方程式は、

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\gamma V(t) + \sigma W(t) \quad (3.8)$$

となる。ノイズがない場合の速度 $v(t)$ と区別するために大文字の $V(t)$ を用いた。(3.8) はランジュヴァン方程式と呼ばれる。

既に注意したように、ホワイトノイズは通常の微積分の範囲外にあるので、通常の微積分のルールを適用することはできないし、それ以前に、(3.8) の右辺の和さえ意味不明なものである。ここでは、それはさておき、通常の微積分の手法を適用してしまおう。これが「形式的適用」の所以である。(3.8) は定数変化法で解くことができ、

$$V(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} W(u) du$$

が得られる。ホワイトノイズに望まれる性質 (第 3.2 節) から、 $V(t)$ は平均値

$$E(V(t)) = v_0 e^{-\gamma t}, \quad (3.9)$$

共分散

$$\text{Cov}(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} \{e^{-\gamma|t-s|} - e^{-\gamma(t+s)}\}$$

をもつガウス過程になる。特に、

$$V(V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (3.10)$$

が得られる。(3.9) と (3.10) から、長時間極限 ($t \rightarrow \infty$) における速度分布が正規分布 $N(0, \sigma^2/2\gamma)$ に漸近することがわかる。このモデルは拡散現象を分子運動の立場から説明するのに役に立つ。

§4 ゆらぎをもつ成長

4.1 指数関数的な成長

時間の経過とともに一定比率で増加または減少するような事例は身の回りにもたくさんある。一定時間 Δt ごとに観測値を得るものとして、時刻 $t = n\Delta t$ における量を x_n とおけば、 x_n は次の差分方程式に支配される：

$$x_n = (1 + a)x_{n-1}. \quad (4.1)$$

あるいは、同じことであるが、

$$x_n - x_{n-1} = ax_{n-1}. \quad (4.2)$$

ただし、 a は定数であり、 $a > 0$ ならば x_n は時間の経過とともに増加し、 $-1 < a < 0$ ならば減少する。どちらの場合も、 a を成長率と呼ぶことにする。(4.1) の解は、 x_0 を初期値として、

$$x_n = (1 + a)^n x_0 \quad (4.3)$$

で与えられる。

時間間隔 $\Delta t \rightarrow 0$ を考えることで、連続時間のモデルを導出しよう。いつもどおり、単位時間を n 個の微小時間区間に分割して、 $1 = n\Delta t$ とする。時間区間 Δt の人口成長率を a として、時刻 t における人口 $x_{\Delta t}(t)$ を微小時間 Δt ごとの成長の結果と考えて離散モデル (4.3) を適用すれば、

$$x_{\Delta t}(t) = (1 + a)^{nt} x_0$$

となる. 求めるべき連続モデルは,

$$n \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad 1 = n\Delta t$$

とする極限

$$x(t) = \lim x_{\Delta t}(t) \quad (4.4)$$

によって定義される. 指数関数の公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

と比較すれば, (4.4) の極限が発散せずに確定するためには, 成長率 a は

$$a = \frac{\alpha}{n} = \alpha \Delta t \quad (4.5)$$

の形をもつことが必要である. ここで α は実数の定数であり, 連続成長率と呼ぶことにする. このとき,

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt} x_0 = e^{\alpha t} x_0 \quad (4.6)$$

が得られ, まさしく指数関数的成長が導かれた ($\alpha > 0$ なら増加, $\alpha < 0$ なら減少である).

(4.6) で得られた $x(t)$ は微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) \quad (4.7)$$

に支配される. 差分方程式 (4.2) と比較すれば, 離散モデルから連続モデルへの移行は, 方程式レベルでは極めて単純である. つまり, (4.2) の差分を微分に置き換えて (4.7) が得られる.

理想的な環境にある人口集団では, 出生率と死亡率の差が人口成長率を与え

る. そうすれば, (4.1) や (4.7) は人口成長のモデルを与える. これをマルサスモデルという (ふつうは連続モデルを指す). $\alpha > 0$ のときは, マルサスモデルに従う人口成長は指数関数的増加となり, 人口爆発を引き起こす.

4.2 ゆらぎの導入

まず, 離散時間モデルを考える. 成長率 a が一定でなくランダムに変動する場合はどうなるだろうか. 最も単純な場合として, 成長率は $a \pm \epsilon$ であって, 各時点で $\pm$ がランダムに等確率で選ばれるものを考えよう. そのような成長率は, 成功確率 $p = 1/2$ のベルヌイ確率変数列 $\{Z_n\}$ を用いて, $a + \epsilon Z_n$ として簡潔に表示できる. そうすると, 差分方程式 (4.1) にかわって

$$X_n = (1 + a + \epsilon Z_n) X_{n-1} \quad (4.8)$$

を考えることになる. あるいは, (4.2) と見比べて,

$$X_n - X_{n-1} = (a + \epsilon Z_n) X_{n-1} \quad (4.9)$$

と書いても同じことである. 解は,

$$X_n = x_0 \prod_{k=1}^n (1 + a + \epsilon Z_k) \quad (4.10)$$

となる (x_0 は初期値).

図 4.1 は具体的な数値でシミュレーションを行ったものである. 成長率を $a = 0.1 \pm 0.05$ として, ± 0.05 は確率 $1/2$ でとるものとした. グラフ中の「決定論

的モデル」というのは成長率を $a = 0.1$ に固定したものである.

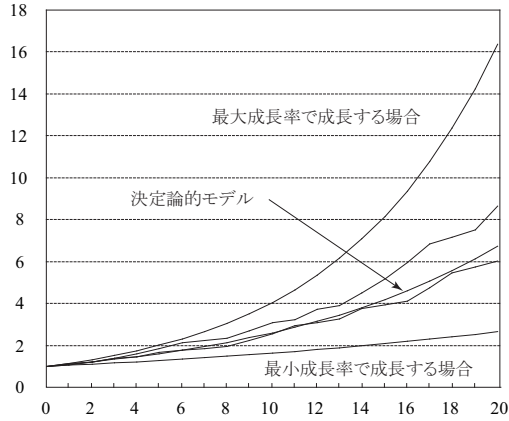


図 4.1 ゆらぎを含む指数関数的成長

では, 連続時間モデルに移行しよう. ランダムウォークからブラウン運動を導いた議論を踏襲して, 連続時間のモデルを構成しよう. 単位時間を n 個の微小区間に分割して,

$$n \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t = 1$$

のようにして極限移行する.

微小時間 Δt ごとに成長するとしたモデルを $X_{\Delta t}(t)$ とする. ただし, 微小区間 $\Delta t (= 1/n)$ における成長率を

$$\alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_k \quad (4.11)$$

ととる. ノイズ項の係数に $\sqrt{\Delta t}$ が現れるところは注目すべきである. (4.11) の第 1 項については, 第 4.1 節で (4.5) を導いた議論からわかる. 第 2 項については, $X_{\Delta t}(t)$ の分散が意味のある極限をもつための条件として導かれる. 我々の関

心は,

$$\begin{aligned} X(t) &= \lim X_{\Delta t}(t) \\ &= \lim x_0 \prod_{k=1}^{nt} (1 + \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_k) \end{aligned}$$

である. 両辺の対数をとって少し計算すると,

$$\begin{aligned} \log \frac{X_{\Delta t}(t)}{x_0} &\approx \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{nt} Z_k \\ &\rightarrow \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \end{aligned}$$

となる. こうして, $X_{\Delta t}(t)$ の極限として,

$$X(t) = x_0 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\} \quad (4.12)$$

が得られた. 一般に, $\exp(at + bB_t)$ の形の確率過程を幾何ブラウン運動という.

(4.12) を形式的に t で微分すると,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_t \right) X(t) \quad (4.13)$$

が得られる. 差分方程式 (4.9) と比較すると, $\sigma^2/2$ の部分にずれが見られることに注意しよう. ただし, (4.13) の右辺でホワイトノイズを含んだ積は, このままでは全く意味不明である (第 5.3 節で再び議論する). この事情は, (3.8) においてホワイトノイズを含んだ和が定義できないことと同じである.

なお, (4.12) は, 株価の変動のモデルとしても重要である ($X(t)$: 株価, α : 安全連続利子率, σ : 株価変動率). 有名な

ブラック–ショールズのオプション価格式 (1977 年ノーベル経済学賞) は、このモデルから導出される。

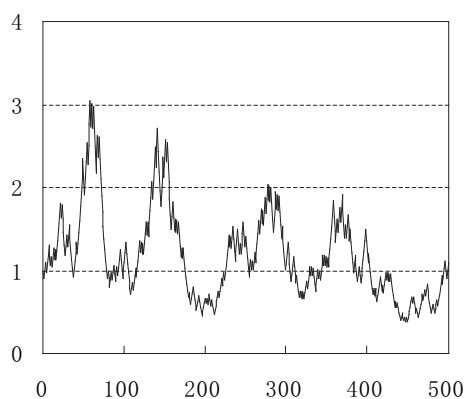


図 4.2 株価変動のシミュレーション
($a = 1 + 0.1Z$, $P(Z = \pm 1) = 1/2$)

§5 ホワイトノイズ超関数

5.1 ガウス空間

ホワイトノイズを数学的に厳密に定義するためにはシュワルツ超関数の概念が必要である。

実数値関数 $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、(i) 無限回連続的微分可能であり、(ii) すべての導関数がどんな次数の多項式よりも早く減少するものを急減少関数という。急減少関数全体に自然な位相を与えることで得られる位相線形空間を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と記す。 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の双対空間 (連続線形汎関数の全体) を $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ で表す。 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の要素をシュワルツの超関数という。記述の便利さのために、 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の標準双線形形式 $\langle x, \xi \rangle$ を用いる。

$f(t)$ を急減少関数あるいは 2 乗可積分関数とすると、

$$\langle x_f, \xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \xi(t) dt, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

によって、 x_f は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の連続線形汎関数、つまり超関数になる。この意味で、普通の関数 f は超関数を 1 つ定める。したがって、関数空間の包含関係

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (5.1)$$

が成り立つ。このような包含関係は超関数の構成において基本的であり、ゲルファントの三つ組と呼ばれる。

超関数の基本例として、 $t \in \mathbb{R}$ を固定して定義される

$$\delta_t(\xi) = \xi(t), \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (5.2)$$

が重要である。これをデルタ関数という。デルタ関数は、普通の関数 $f(t)$ を用いて上の x_f のように表現することができない。その意味で、デルタ関数は「関数を超える」ものであって、 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ においてようやく捕捉されるのである。

シュワルツ超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ には

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx) = e^{-\langle \xi, \xi \rangle / 2}, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

によって一意的に定まる確率測度 μ が導入される。これをガウス測度といい、確率空間 $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ をガウス空間と呼ぶ。

$\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を固定して、

$$x \mapsto X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle \quad (5.3)$$

を考えると, X_ξ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 上の (連続かつ線形な) 関数である. つまり, ガウス空間 $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ で定義された確率変数である. さらに, 若干の計算によって, $\{X_\xi; \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}$ は平均 0, 共分散

$$E(X_\xi X_\eta) = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

を満たすガウス族であることがわかる.

第 3.2 節で同じ性質をもつガウス族を議論したことを思い出して欲しい. そこでは, ホワイトノイズと呼ばれる仮想的な確率過程 $\{W(t)\}$ を用いて

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)W(t) dt \quad (5.4)$$

を定義したのだった. (5.3) を

$$X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\xi(t) dt$$

と形式的に積分表示して, (5.4) と比較すれば,

$$W(t) = x(t) = \langle x, \delta_t \rangle \quad (5.5)$$

が得られる. これはホワイトノイズの新しい表示である.

しかしながら, ホワイトノイズが簡単には定義できないことが再確認されるところでもある. 一般に, $\langle x, \xi \rangle$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の標準双線形形式 (双対性に基づく) であるから, (5.5) は双対性や L^2 -位相による近似の及ばない形をしており, 確率変数としては定義できない. 再び, ホワイトノイズの困難に直面する. 言い換えれば, ホワイトノイズを

数学的に定式化するということは, 文字通りの意味をもたない (5.5) をより高い立場から見直すことである.

5.2 ホワイトノイズ超関数

ホワイトノイズの表示 (5.5) にデルタ関数が現れた. デルタ関数は双対空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ によって把握される超関数である. したがって, ふつうの確率変数をなんらかの双対性に基づいて超関数的に拡張することでホワイトノイズを数学的に定式化できないだろうか. 実は, このことは可能である.

関数列 $\varphi = (f_n)_{n=0}^\infty$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}^n; \text{sym})$, であって

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2 < \infty$$

を満たすものの全体はヒルベルト空間になる. これを $L^2(\mathbb{R})$ 上のボゾン・フォック空間と呼び, $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ と記す. 任意の $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\varphi_\xi(x) = e^{\langle x, \xi \rangle - \langle \xi, \xi \rangle / 2}, \quad x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

によって定義される $\varphi_\xi \in L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ と

$$\left(1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \dots\right) \in \Gamma(L^2(\mathbb{R}))$$

を対応させることで, ユニタリ同型

$$L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \cong \Gamma(L^2(\mathbb{R}))$$

が得られる. これをウィナー–伊藤–シーガルの同型という.

1 変数関数に対する包含関係であるゲルファントの三つ組 (5.1) は, 自然に n 変数の対称関数に拡張され, さらに, ボゾンフォック空間 $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ が $L^2(\mathbb{R}^n; \text{sym})$ から構成されたのと同様にして, ゲルファントの三つ組

$$\Gamma(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \Gamma(L^2(\mathbb{R})) \subset \Gamma(\mathcal{S}'(\mathbb{R})) \quad (5.6)$$

が得られる. これにウィナー–伊藤–シーガルの同型を適用すれば, ガウス空間上の関数空間の包含関係

$$\mathcal{W} \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \subset \mathcal{W}' \quad (5.7)$$

に移る. これは, ガウス空間上のゲルファントの三つ組であり, $\mathcal{W}'$ の要素はガウス空間上の超関数となる ((5.1) と比較せよ). それをホワイトノイズ超関数と呼ぶ. (5.6) や (5.7) の標準双線形形式を $\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle$ で表す.

$\mathcal{W}$ や $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ の要素は, 通常確率変数である. たとえば, ブラウン運動は

$$B(t) = \langle x, 1_{[0,t]} \rangle \quad (5.8)$$

のように表現され, $B(t) \in L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ がわかる. ウィナー–伊藤–シーガルの同型によって, ブラウン運動を $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ に属する関数列として表現すれば,

$$B(t) = (0, 1_{[0,t]}, 0, \dots) \quad (5.9)$$

となる. ウィナー–伊藤–シーガルの同型のすごいところは, ガウス空間で定義された確率変数を $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ の関数列に置

き換えて研究する道を拓いただけではなく, 姿の見えないホワイトノイズ超関数を代数的に取り扱える形に表現する術を与えたことにある.

実際, ガウス空間で定義し難いホワイトノイズが, (5.6) を用いることで, いとも簡単に定義されるのである. (5.9) を t で微分すると,

$$\frac{dB(t)}{dt} = (0, \delta_t, 0, \dots)$$

となる. 右辺は $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ には属さないが, $\Gamma(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ に属することは構成から明らかであろう. そこで,

$$W(t) = (0, \delta_t, 0, \dots) \in \Gamma(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$$

をホワイトノイズの定義とする. 必要に応じて, ウィナー–伊藤–シーガルの同型によってガウス空間上の超関数と認識すればよい. その場合, 記号として,

$$W(t) = \langle x, \delta_t \rangle = x(t)$$

を用いる. (5.5) で議論した表示は, 文字通りの双線形形式と理解することはできなかったが, 以上の議論を踏まえて, ホワイトノイズ超関数として数学的に厳密に定義されるに至ったのである.

要するに, ホワイトノイズ超関数とは, ウィナー–伊藤–シーガルの同型とフォック空間の構造を用いて構成されたガウス空間上のシュワルツ型超関数のことである. この構成は久保–竹中 (1980) によってなされた.

5.3 ホワイトノイズ微分方程式

第 3.3 節では, ホワイトノイズの形式的適用の例として, 方程式

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\gamma V(t) + \sigma W(t) \quad (5.10)$$

を考察した. この方程式には, ランダム現象のモデルとしての直感的な由来があったが, ホワイトノイズが確率変数ではないため, 方程式自体が数学的に定義されていなかった. ところが, ホワイトノイズ超関数を用いることで方程式そのものにも意味がつくのである.

まず, ホワイトノイズ超関数の空間 $\mathcal{W}'$ をもちだすことで,

$$t \mapsto W(t) \in \mathcal{W}'$$

が滑らかな関数 (写像) となる. そうすると, (5.10) はホワイトノイズ超関数に関する常微分方程式 (!) として意味をもつ. ふつうの常微分方程式の未知関数は実数値関数であるが, (5.10) の未知関数は $\mathcal{W}'$ に値をとる関数 $V(t)$ である. そのような違いがあるにせよ, (5.10) は常微分方程式であるから, 通常の変数変化法が適用できて,

$$V(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} W(u) du$$

のように解が求まる. ただし, 得られた解 $V(t)$ はホワイトノイズ超関数である. 次に, 被積分関数の形から, $V(t) \in L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ が証明され, ガウス過程になっていることがわかる.

第 4.2 節では, 幾何ブラウン運動から形式的に導出した方程式を書き下した. (4.13) のパラメータを少し書き直して,

$$\frac{dX(t)}{dt} = (\beta + \sigma W(t)) X(t) \quad (5.11)$$

を考察しよう. このタイプの方程式はブラック-ショールズ・モデルからも導かれる. まず, この方程式は (5.10) とは違って, ホワイトノイズ超関数に対する方程式とみなしても意味をもたない. それは, ホワイトノイズ超関数同士の積が意味をなさないからである.

ホワイトノイズ超関数には, 正規積 (ウィック積) と呼ばれる積が定義される. 一般に, ホワイトノイズ超関数 $\Phi \in \mathcal{W}'$ に対して,

$$S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \varphi_\xi \rangle\rangle, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

を Φ の S 変換という. 2 つのホワイトノイズ超関数 $\Phi, \Psi \in \mathcal{W}'$ に対して,

$$S(\Phi \diamond \Psi) = S(\Phi)S(\Psi)$$

を満たす積 $\Phi \diamond \Psi \in \mathcal{W}'$ が定義されることが知られている.

そこで, (5.11) にかえて,

$$\frac{dX(t)}{dt} = (\beta + \sigma W(t)) \diamond X(t) \quad (5.12)$$

ならホワイトノイズ超関数に対する常微分方程式として意味をもつ. 初期条件を $X(0) = x_0$ として解いてみよう. 両辺の S 変換を考える. $U_\xi(t) = S(X(t))(\xi)$

とおけば,

$$\frac{dU_\xi(t)}{dt} = (\beta + \sigma\xi(t))U_\xi(t), \quad U_\xi(0) = x_0.$$

これは普通の線形常微分方程式であるから, すぐに解けて,

$$U_\xi(t) = x_0 \exp \left\{ \beta t + \sigma \int_0^t \xi(s) ds \right\}$$

が得られる. 逆 S 変換を施せば,

$$X(t) = x_0 \exp \left\{ \left(\beta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\}$$

となり, (5.12) の解が得られる.

以上から, 第 4.2 節で導入したノイズを含む指数関数的成長のモデル (4.12) は

$$\frac{dX(t)}{dt} = (\alpha + \sigma W(t)) \diamond X(t) \quad (5.13)$$

に従うことになる. しかも, この方程式は離散時間のモデル (4.9) から形式的移行で直ちに得られることに注目しておこう. 一般に, ホワイトノイズを含み, 正規積で書かれている方程式を正規積ホワイトノイズ微分方程式と呼んでいる. 線形方程式については Chung–Ji–Obata [4], Obata [22, 23], 総説は Ji–Obata [9] にある.

人口成長のマルサスモデルの前提条件はかなり現実から乖離しているため, 上限のある人口成長モデルがフェアフルストによって提案された:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - x(t)^2. \quad (5.14)$$

2 次の非線形項の効果として, 人口が増えると人口増加率が減少し飽和が起る (ロジスティック効果). したがって, ロジスティックモデルとも呼ばれる. ((5.14) を離散化した差分方程式はカオスを生ずることでよく知られている.) (5.14) に付随して, 正規積ホワイトノイズ微分方程式

$$\frac{dX(t)}{dt} = (\alpha + \sigma W(t) - X(t)) \diamond X(t)$$

はホワイトノイズ超関数に関する常微分方程式として意味をもつ. このような非線型方程式については, Ji–Obata [8, 9] の端緒的研究があるが, ほとんど手付かずの状況である. 安定人口モデルや両性人口モデルに関連してホワイトノイズ方程式を議論することは重要かつ興味深い研究テーマである.

§6 量子ホワイトノイズ解析

6.1 量子確率論

量子確率論は現代確率論のパラダイムシフトを起こしていると言っても過言ではあるまい. 確率変数はもともとランダムな変量を表すから, 実数値 (場合によっては複素数値) をとるものとして扱われる. 量子確率論では, この点が大きく見直される.

ランダム現象をモデル化して解析する場合, 最も重要なものは, その現象に

付随する確率変数 X の分布 $\mu_X(dx)$ である。このとき、 X の平均や分散は x の 1 次式あるいは 2 次式を μ_X で積分したものである。一般に、 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$M_m(X) = E(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu_X(dx)$$

を分布の m 次モーメントという ($M_0 = 1$ とし、積分の収束は仮定する)。

モーメント列から分布が再現できるかという問題は重要である。一般には、同じモーメント列をもつ異なる分布が存在するため、この問題の解答は否定的である。しかし、多くの重要な分布はモーメント列で決定されることがわっている。したがって、分布 μ_X そのものは必要に応じて考えればよいとして、モーメント列を研究の中心におくことができる。

一例として、公平なコイン投げ Z を考えよう。確率変数 Z は $P(Z = +1) = P(Z = -1) = 1/2$ を満たすので、そのモーメント列は、

$$M_m = \begin{cases} 1, & m \text{ が偶数} \\ 0, & m \text{ が奇数} \end{cases} \quad (6.1)$$

となる。つまり、公平なコイン投げのもつあらゆる統計的な情報は、モーメント列と呼ばれる数列 (6.1) から取り出すことができるのだ。

ここで、簡単な行列の計算をしよう。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく。 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して、内積

$$\langle e_0, A^m e_0 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (6.2)$$

を計算すると、 m が偶数のとき 1、奇数のとき 0 となる。つまり、(6.2) から得られる数列は (6.1) に一致するのである。このことはコイン投げの統計解析に新しい観点を提供する。コイン投げの統計的な性質は、そのモーメント列から完全に再現できるので、行列 A と単位ベクトル e_0 に関して内積をとるという仕組みもまたコイン投げの「確率モデル」を提供することになる。

(6.2) がコイン投げの「確率モデル」を与えているとすれば、行列、単位ベクトル、内積などを基礎とする確率論が構成されるべきであろう。これが量子確率論である。公理的に述べると次のようになる。 $\mathcal{A}$ を複素数 $\mathbb{C}$ を係数体とする $*$ -代数とする。 $\mathcal{A}$ 上の線形関数 φ で正値性 ($\varphi(B^*B) \geq 0$) と正規性 ($\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$) を満たすものを状態という。 $*$ -代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 φ を組にした $(\mathcal{A}, \varphi)$ を代数的確率空間と呼ぶ。

こうして、コイン投げは、上の行列 A が生成する $*$ -代数 $\mathcal{A}$ と

$$\varphi(B) = \langle e_0, B e_0 \rangle, \quad B \in \mathcal{A},$$

によって定義される状態 φ を組とする代数的確率空間によってモデル化されるのである。量子確率論の一般的な枠組みについては [1, 7, 17, 24] などを見よ。

6.2 量子分解

量子確率論は従来の確率論を代数化し非可換拡張することになるので、確率論の手法と適用範囲を著しく拡大することになる。たとえば、多様な独立性と付随する中心極限定理、分割の統計とモーメント-キュミュラント公式などがある。ここでは、量子分解を取り上げる。

再びコイン投げを例にする。行列 A は第 6.1 節 で与えたものとする。新たに、

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

とおくと、

$$A = A^+ + A^- \quad (6.3)$$

が成り立つ。これを量子分解という。

量子分解を用いて、 m 次モーメント $\langle e_0, A^m e_0 \rangle$ を計算してみよう。(6.3) を代入して展開すれば、

$$\langle e_0, A^m e_0 \rangle = \sum \langle e_0, A^{\epsilon_m} \cdots A^{\epsilon_2} A^{\epsilon_1} e_0 \rangle \quad (6.4)$$

が得られる。和は、 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ を $\pm$ のすべての配列を走らせてとる。簡単な計算をわざわざ複雑にしたように見えるが、実はそうでもないのである。 $A^\pm$ の e_0 への作用は、

$$\begin{aligned} A^+ : e_0 &\mapsto e_1 \mapsto 0, \\ A^- : e_1 &\mapsto e_0 \mapsto 0, \end{aligned}$$

のようになっているので、(6.4) の右辺に現れている

$$A^{\epsilon_m} \cdots A^{\epsilon_2} A^{\epsilon_1} e_0 \quad (6.5)$$

は 3 個のベクトル $e_0, e_1, 0$ を訪ね歩く長さ m の道 (m ステップのウォークという) を表すことになる。途中に零ベクトルが現れると、(6.4) への寄与は 0 となるから、そのようなケースはあらかじめ除いておこう。そこで、 e_0, e_1 を頂点とするグラフを考えると便利である。

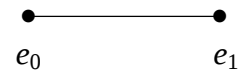


図 6.1 e_0, e_1 を頂点とするグラフ

(6.5) が e_0 から出発して、 e_0 に戻ってくる m ステップのウォークを表すときは、

$$\langle e_0, A^{\epsilon_m} \cdots A^{\epsilon_2} A^{\epsilon_1} e_0 \rangle = 1,$$

それ以外は 0 ということになる。したがって、 $\langle e_0, A^m e_0 \rangle$ は e_0 から e_0 に至る m ステップのウォークの個数に等しい。グラフの形状から、その個数は m が奇数のとき 0、偶数のとき 1 となることは明らかであろう。

ここで注目すべきことは、 A を量子成分 $A^\pm$ の和に分解することで、コイン投げのモーメントを計算することができ、それは従来の確率論にはない新しい方法になっているのである。

行列 A は図 6.1 のグラフの隣接行列である。量子分解のアイデアは、グラフのスペクトル解析に新しい視点と手法をもたらした。特に、成長するグラフの漸近的スペクトル解析や対称群の漸近

的表現論への応用は他に類を見ないものとなっている (Hora–Obata [7] と引用文献).

6.3 量子ホワイトノイズ

第 5 節で説明したホワイトノイズ超関数は、あくまで古典的確率変数の超関数の一般化である。古典的なコイン投げに対して量子確率モデルを構成した (第 6.1 節) のと同様に、ホワイトノイズ超関数を量子確率論の枠組みに移行させることが必要である。

ホワイトノイズ超関数はゲルファントの三つ組

$$\mathcal{W} \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \subset \mathcal{W}'$$

によって定義された。 $\mathcal{W}$ はなめらかな確率変数のなす空間であって、積について閉じていることが示される。そうすると、 $\varphi \in \mathcal{W}$ と $\Phi \in \mathcal{W}'$ との積 $\varphi\Phi = \Phi\varphi$ が

$$\langle\langle \varphi\Phi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \varphi\psi \rangle\rangle, \quad \psi \in \mathcal{W},$$

によって定義される。2 つのホワイトノイズ超関数の積は定義できないが、一方が $\mathcal{W}$ に属せば積が定義されるのである。この積を用いると、写像 $\varphi \mapsto \Phi\varphi$ が定義されるが、これを Φ による掛け算作用素という。 $\mathcal{W}$ から $\mathcal{W}'$ への連続線形作用素になる。この意味で、ホワイトノイズ超関数を量子的な枠組みに移行させることができる。特に、ホワイトノイ

ズ $W(t)$ を掛け算作用素とみなすことが重要である。

コイン投げの確率変数 A の量子分解において、 $A^\pm$ を導入した。この量子成分の作用は、ベクトル e_0, e_1 の上げ下げであった。ホワイトノイズの場合は、ボゾンフォック空間の表示を用いて、次のように $a(t)^\pm$ を定義する:

$$\begin{aligned} a(t)^- &: (0, \dots, 0, \xi^{\otimes n}, 0, \dots) \\ &\mapsto (0, \dots, 0, n\xi(t) \xi^{\otimes(n-1)}, 0, \dots), \\ a(t)^+ &: (0, \dots, 0, \xi^{\otimes n}, 0, \dots) \\ &\mapsto (0, \dots, 0, \delta_t \hat{\otimes} \xi^{\otimes n}, 0, \dots). \end{aligned}$$

$a(t)^-$ の作用は成分を 1 つ左にずらし、 $a(t)^+$ の作用は成分を 1 つ右にずらす。量子物理の用語を用いて、 $a(t)^-$ を時点 t における消滅作用素、 $a(t)^+$ を時点 t における生成作用素と呼ぶ。簡単な計算によって、

$$W(t) = a(t)^+ + a(t)^-$$

が確認できる。これが、ホワイトノイズの量子分解である。この意味で、 $\{a(t)^+, a(t)^-\}$ を量子ホワイトノイズと呼ぶ。

量子ホワイトノイズによってブラウン運動は

$$B(t) = \int_0^t (a(s)^+ + a(s)^-) ds$$

のように表現される。右辺に現れた

$$A(t)^\pm = \int_0^t a(s)^\pm ds$$

をそれぞれ消滅過程, 生成過程と呼ぶ. ブラウン運動はこれらの和であるが,

$$B(t) = A(t)^+ + A(t)^-$$

がブラウン運動の量子分解を与える. 量子ホワイトノイズの面白いところは,

$$P(t) = \int_0^t (a(s)^+ + \sqrt{\lambda})(a(s)^- + \sqrt{\lambda}) ds$$

がポワソン過程になることである. 右辺に現れている

$$\Lambda(t) = \int_0^t a(s)^+ a(s)^- ds$$

を個数過程または保存過程という. ポワソン過程の量子分解は

$$P(t) = \sqrt{\lambda} A(t)^+ + \sqrt{\lambda} A(t)^- + (\Lambda(t) + \lambda t)$$

となる. なお, 一般に量子分解は 3 つの量子成分を与える [1, 7].

上に例示した (古典および量子) 確率過程はすべて

$$\Xi = \Xi(a_t^+, a_t^-; t \in \mathbb{R}) \quad (6.6)$$

のように量子ホワイトノイズの「関数」として把握される. これが量子ホワイトノイズ解析の立脚点である (総説は Ji-Obata [9] を見よ). 量子伊藤解析 [17, 24] は生成・消滅・保存過程の 3 つの量子確率過程を基礎とした伊藤理論の非可換拡張であるが, 量子ホワイトノイズ解析は量子ホワイトノイズ $\{a_t^+, a_t^-\}$ を基礎とするところが重要である (図 6.2).

量子ホワイトノイズ解析の展開には, 超関数論的な非可換解析が必要であり面白い. たとえば, (6.6) において $a_t^\pm$ を座標関数のように見立てた微分 (量子ホワイトノイズ微分) が定式化 [13, 15] され, 量子確率積分や量子マルチンゲールへ応用されている. また, ホワイトノイズの高次ベキの理解やそれを含む量子ホワイトノイズ微分方程式は, 古典論では扱えず, 量子ホワイトノイズ解析で初めて数学的議論の対象となる. 特に, ユニタリ解に関連する研究が進展している [2, 12, 14]. この方向への幅広い研究が今後ますます重要になるだろう.

参考文献

- [1] 明出伊類似・尾畑伸明: 量子確率論の基礎, 牧野書店, 2003.
- [2] W. Ayed, N. Obata and H. Ouerdiane: *Partial unitarity arising from quadratic quantum white noise*, in “Mathematical Models of Random Phenomena (A. B. Cruzeiro, N. Obata and H. Ouerdiane, Eds.),” World Scientific, 2007, in press.
- [3] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Higher powers of quantum white noises in terms of integral kernel operators*, Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 533–559.
- [4] D. M. Chung, U. C. Ji and N.

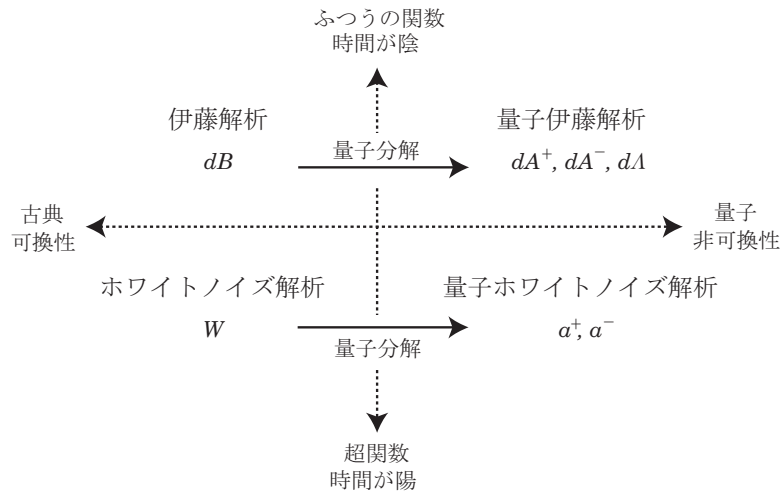


図 6.2 量子ホワイトノイズ解析の位置づけ

- Obata: *Quantum stochastic analysis via white noise operators in weighted Fock space*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 241–272.
- [5] 飛田武幸: 本報告集, 第 5–6 章.
- [6] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: “White Noise. An Infinite Dimensional Calculus,” Kluwer, 1993.
- [7] A. Hora and N. Obata: “Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs,” Springer, 2007.
- [8] U. C. Ji and N. Obata: *Initial value problem for white noise operators and quantum stochastic processes*, in “Infinite Dimensional Harmonic Analysis (H. Heyer, T. Hirai and N. Obata, Eds.),” pp.203–216, D.+M. Gräbner, Tübingen, 2000.
- [9] U. C. Ji and N. Obata: *Quantum white noise calculus*, in “Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads (N. Obata, T. Matsui and A. Hora, Eds.),” pp. 143–191, World Scientific, 2002.
- [10] U. C. Ji and N. Obata: *A unified characterization theorem in white noise theory*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top. **6** (2003), 167–178.
- [11] U. C. Ji and N. Obata: *A role of Bargmann–Segal spaces in characterization and expansion of operators on Fock space*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 311–338.
- [12] U. C. Ji and N. Obata: *Unitarity of Kuo’s Fourier–Mehler trans-*

- form, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* **7** (2004), 147–154.
- [13] U. C. Ji and N. Obata: *Admissible white noise operators and their quantum white noise derivatives*, in “Infinite Dimensional Harmonic Analysis III (H. Heyer, T. Hiraï, T. Kawazoe, K. Saitô, Eds.), pp. 213–232, World Scientific, 2005.
- [14] U. C. Ji and N. Obata: *Unitarity of generalized Fourier–Gauss transforms*, *Stochastic Anal. Appl.* **24** (2006), 733–751.
- [15] U. C. Ji and N. Obata: *Generalized white noise operator fields and quantum white noise derivatives*, to appear in *Sem. Congr. Soc. Math. France*.
- [16] H.-H. Kuo: “White Noise Distribution Theory,” CRC Press, 1996.
- [17] P.-A. Meyer: “Quantum Probability for Probabilists,” *Lect. Notes in Math.* Vol. 1538, Springer, 1993.
- [18] N. Obata: *An analytic characterization of symbols of operators on white noise functionals*, *J. Math. Soc. Japan* **45** (1993), 421–445.
- [19] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, *J. Funct. Anal.* **121** (1994), 185–232.
- [20] N. Obata: “White Noise Calculus and Fock Space,” *Lect. Notes in Math.* Vol. 1577, Springer, 1994.
- [21] N. Obata: *Generalized quantum stochastic processes on Fock space*, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **31** (1995), 667–702.
- [22] N. Obata: *Quantum stochastic differential equations in terms of quantum white noise*, *Nonlinear Anal.* **30** (1997), 279–290.
- [23] N. Obata: *Wick product of white noise operators and quantum stochastic differential equations*, *J. Math. Soc. Japan* **51** (1999), 613–641.
- [24] K. R. Parthasarathy: “An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,” Birkhäuser, 1992.