第2章　集　合

現代数学において, 集合は最も基本的な概念である. それゆえ, 集合をきちんと定義しようとしても, それ以上に基本的な用語や数学概念が易々とは見当たらない. 集合論を創始したカントル[1)]は, その有名な論文の冒頭で, 集合を「我々の直感あるいは思考の明確な対象で, 互いに区別されるものをひとまとめにしたもの」として導入した. このような定義から出発する集合論を**古典集合論**または**素朴集合論**といい, 本書もこの立場で話を進めていく. しかしながら, 思考の対象と言うだけでは, その範囲に曖昧さが残り, それがゆえの問題も生じてしまう. これについては, 第 2.3 節で触れることにする.

2.1　集合と元

思考の対象となる個々の「もの」を 1 つにまとめたものを**集合**という. その「もの」は個々に区別され, その集まりに属しているか否かがはっきり識別されなければならない. 集合を構成する個々の「もの」を集合の**元** (げん) または**要素**という. たとえば, 100 以下の自然数の集まり, 1 より大きく 2 より小さい実数の集まり, 平面の正 3 角形の集まりは, それを構成する元が明確であるから集合である. しかし, 小さな自然数の集まり, 2 に近い実数の集まり, 丸い図形の集まりというような曖昧な規定の仕方では集合にならない. 対象がその集まりに属しているか否かがはっきり識別されないからである.

個別の「もの」をひとまとめにしてできる集合は, また 1 つの思考の対象になるので, 1 つの名前をつけて表すことにする. 本書では, 集合を大文字 $A, B, C, \ldots$

[1)] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918). ドイツの数学者. 三角級数の収束に関連して実数の性質を探究する中で集合の概念を着想し, 1874 年の有名な論文 [32] で「集合」を世に出した. さまざまな困難と闘いながら集合論を構築し, 1895 年から 1897 年にかけて 2 部に分けて発表された論文 [36] (和訳 [24]) によって集合論の開祖として不動の地位を築いた. ここに引用した定義はこの論文の冒頭にある. 研究の進展とともに, 次第に精神を病み, 最後はハレのサナトリウムで世を去った.

で, その元を小文字 $a, b, c \ldots$ で表すことが多い. もし, a が集合 A の元であるとき,

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a$$

のように書いて, a は集合 A に**属する**[2] という. 集合 A が a を元としないときは,

$$a \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni a$$

のように書く. 文字通り, 元 (げん) が元 (もと) になって集合ができるという点ばかりに注目すると, 集合の方が元よりも上位の概念であるととらえがちである. しかし, 数学では集合と元を対等な対象として扱う. たとえば, 点と線の関係でどちらを優先するということはないように.

■ **集合の相等** 元がすっかり一致するような 2 つの集合は**等しい**といい, $A = B$ と書く. 等しくないときは $A \neq B$ と書く. より詳しく言えば, 集合 A, B において, x が A の元であれば B の元でもあり, 逆に, x が B の元であれば A の元でもあるときに, 2 つの集合 A, B は等しい.

■ **数の集合** 数の集合は数学では最も基本的であるので, 共通の記号 (アルファベットの太字を用いる) が広く普及している.[3]

自然数	整 数	有理数	実 数	複素数
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

■ **外延的記法** 元を列挙することで集合を表すことができる. たとえば, $2, 3, 5, 7$ の 4 個の自然数を元とする集合 A を

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \tag{2.1}$$

のように, 元をコンマで区切りながら列挙し, 中括弧でくくって表す. このとき, 元を列挙する順序は考慮されないので,

$$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{5, 7, 2, 3\} = \{7, 3, 5, 2\}$$

[2] 文献によっては, 「a は集合 A に**含まれる**」あるいは「集合 A は a を**含む**」ともいう. ただし, 「含む」という用語は部分集合にも用いる (2.2 節) ので, 混乱を避けるという意味であまり推奨されない.

[3] それぞれ, natural number, Zahl (これはドイツ語; 英語では integer), quotient, real number, complex number の頭文字である.

などが成り立つ．さらに, 同じ元を重複して列挙しても構わないが, 集合としてはそのような重複も考慮されない．たとえば,

$$A = \{2, 3, 7, 5, 3, 5, 7, 7\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

が成り立ち, A は 4 個の元からなる．

ただ 1 つの元 a からなる集合は $\{a\}$ となる．元そのもの a とそれを元とする集合 $\{a\}$ は区別される.[4)]

集合 A と同様に, 100 以下の自然数の集合を B とすると,

$$B = \{1, 2, \ldots, 100\} \tag{2.2}$$

と表される．本来なら中括弧の中に 100 個の数を書き並べるところだが, 面倒であるし, 暗黙の了解でわかるので「...」で略記している．さらに, この用法を拡大適用して, 自然数の集合を,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.3}$$

のように書くことも多い.[5)] ここでも「...」は暗黙の了解であって, 共通認識に訴えていることは (2.2) と同様である．しかし, 大きな違いもあって, (2.2) では, その気になれば,「...」を避けることができるが, (2.3) では「...」を避けることが原理的に不可能である．この意味で, (2.3) はあくまで便宜上の記法であって, 集合 $\mathbb{N}$ の正式な定義としては採用できない．

■ 内包的記法 すでに見えてきているが, 集合を記述する上で, すべての元を列挙することが, 目的から見て不便なことやそもそもできないことも多い．そのときは, 集合の元をその性質で規定する．つまり, 対象 x に対する条件や性質を述べた命題関数 $P(x)$ を設定して, それを満たすような x をすべて集めて集合を定義する．これを,

$$\{x \mid P(x)\} \tag{2.4}$$

のように表す.[6)] たとえば,

$$A = \{x | x \text{ は 1 桁の素数である }\}$$

[4)] もし $a = \{a\}$ ならば, 定義によって $a \in a$ である．集合 a が $a \in a$ を満たすとは, 誠に奇妙に感じられるが, 素朴に集合を導入したからには, $a \in a$ を排除する理由もない．ただし, 公理的集合論 (ZF 公理系) では $a \in a$ は排除されるので, つねに $a \neq \{a\}$ である (第 3.3 節).

[5)] 文献によっては 0 を自然数に含めるが, 本書では含めない．

[6)] 文献によっては $\{x\,;\,P(x)\}$ のようにも書く．

とすれば, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ と同じことである. また, (2.4) において文字 x を用いているが, $P(x)$ を満たす x を代表しているだけなので, 使用する文字は自由であって,

$$\{x \,|\, P(x)\} = \{y \,|\, P(y)\} = \{z \,|\, P(z)\}$$

が成り立つ. この意味で, $\{x \,|\, P(x)\}$ における記号 x はダミーと呼ばれる.

一般に, 外延的記法で定義される集合は, 適当な命題関数を導入することで内包的記法でも表すことができる. たとえば, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ に対して, 命題関数 $P_2(x)$ を「x は 2 である」で定義すると, $x = 2$ のときに真, それ以外は偽となる命題になる. 同様に, 命題関数 $P_3(x)$, $P_5(x)$, $P_7(x)$ を定義して, 複合命題

$$Q(x) = P_2(x) \vee P_3(x) \vee P_5(x) \vee P_7(x)$$

を考えると, $A = \{x \,|\, Q(x)\}$ となる. しかし, 内包的記法を外延的記法に書き換えることは一般にはできない.

表記法についていくつかの注意を述べておこう. 複数の条件 $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ を同時に満たすような x のつくる集合は, 論理式を用いて,

$$\{x \,|\, P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \cdots \wedge P_n(x)\}$$

のように書くのが正式であるが, 習慣によって,

$$\{x \,|\, P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$$

と書く. つまり, 条件を接続しているコンマ (,) は「かつ」の意味にとる. また,

$$\{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

のような簡略化された記法も用いる. これは, n を整数全体 $\mathbb{Z}$ を走らせたとき, $2n$ の形で得られる数の集まりを意味する. 内包的記法を厳格に適用すれば,

$$\{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{x \,|\, \exists n(n \in \mathbb{Z} \wedge x = 2n)\}$$

である. 結果的に, これは偶数の集合である. 同様に,

$$\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

は平方数の集合になる．ここで，$9 = 3^2 = (-3)^2$ のように同じ数が 2 通りに表されるが，集合にはこのような重複は反映しない．有理数全体の集合は

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{q}{p} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z},\, p \neq 0 \right\}$$

と表すことができる．

■ **空集合**　もし，条件 $P(x)$ を満たす x が存在しなければ，集合 $\{x \,|\, P(x)\}$ に属する元がない．そもそも集合をものの集まりとして話を始めたのだが，集めるべき元がない場合も集合とみなす．これを**空集合**と呼び，$\emptyset$ または $\{\,\}$ で表す．[7)]

空集合は何もない空虚な状態を仮想したものであるが，集合としての空集合は存在する 1 つの実態を得る．したがって，$\{\emptyset\}$ は空集合という 1 つのものを元とする集合であって，それ自身は空集合ではない．

■ **全体集合**　多くの場合，ある集合 X があらかじめ与えられていて，その集合 X の元 x に対してだけ条件 $P(x)$ の成否を考える．このとき，X を**全体集合**といい，X の元 x で $P(x)$ を満たすものを集めてできる集合を

$$\{x \,|\, x \in X, P(x)\} = \{x \in X \,|\, P(x)\}$$

のように書く．同じ条件 $P(x)$ を与えても，全体集合が違えば得られる集合は一般には異なる．たとえば，

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^4 = 4\} = \emptyset, \\
&\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^4 = 4\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \\
&\{x \in \mathbb{C} \,|\, x^4 = 4\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}.
\end{aligned}$$

■ **有限集合と無限集合**　有限個の元からなる集合を**有限集合**という．集合 A が有限集合であるとき，その元の個数を $|A|$ で表す．空集合も有限集合であり，$|\emptyset| = 0$ となる．集合が有限個の元からなる，あるいは，ちょうど n 個の元からなることの意味は明らかなことのように思われるが，数学的な説明を要することではある．当面は，$|A| = n$ とは，A の元を列挙して，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のように番号を付けて区別できることと理解しておこう (詳しくは，第 6 章で扱う)．

[7)] 記号 $\emptyset$ はブルバキ「数学原論」(1939) で初めて使われたもので，ヴェイユ (André Weil, 1906–1998. フランスの数学者) がノルウェー語のアルファベット Ø をもとに発案したという．以前は，0 (ゼロ) も用いられていたが，今では使われていない．ギリシャ文字の ϕ (ファイ) で代用することもあるが，本来はギリシャ文字とは無関係である．

有限集合でない集合を**無限集合**という. A が無限集合であるときは, 単に有限集合と区別する意味で $|A| = \infty$ と書く. 第 7 章では, 個数にかわる「濃度」という概念を導入して, 無限集合の大きさの比較を行う. さらに, 有限集合のより本質的な性質を議論する.

■ **集合族** 集合をいくつか集めれば, それも集合になる. たとえば,

$$\{\{1,2,3\},\{3,4,5,7\},\emptyset\}$$

は 3 個の元からなる集合である. 集合を元とする集合を考えるとき, 元が集合であることを強調して**集合族**と呼ぶことがある.

問 2.1 次の集合はそれぞれ何個の元からなるか.

$$\{1,2,1,0,1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = -1\}, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}.$$

2.2 集合の包含関係

■ **部分集合** 2 つの集合 A, B において, 集合 A のすべての元が集合 B の元になっているとき, A は B に**含まれる**, B は A を**含む**, あるいは, A は B の**部分集合**であるといい,

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

と書く. 端的に言い換えれば, $A \subset B$ とは, $\forall x(x \in A \to x \in B)$ が真であること, つまり, 任意の x に対して,

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つことを意味する.

集合に対して, 含む, 含まれないという関係を**包含関係**という. 包含関係を視覚的に表す方法に**ベン図**がある. 平面に閉曲線を描いて, その内部にある点を集合の元と見立てるのである. 一方, 元が集合に属する, 属さないという関係は**帰属関係**という.

定義によって, つねに $A \subset A$ が成り立つことに注意しよう. もし, $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であれば, A を B の**真部分集合**といい, $A \subsetneq B$ と書く.[8)]

8) 本書で採用した記号 $\subset$ は不等号 $<$ の使い方とは異なる. $A \subset A$ は成り立つが, $2 < 2$ は成り立たない. ただし, 文献によっては, 部分集合を $\subseteq$ で記し, 真部分集合を $\subset$ で表すものもある.

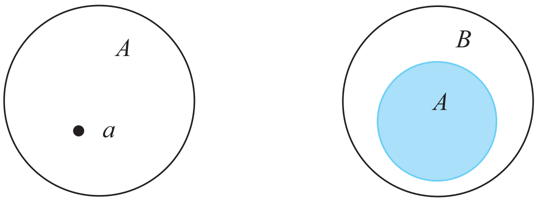

図 2.1: ベン図. 帰属関係 $a \in A$ と包含関係 $A \subset B$

■ **必要条件と十分条件**　X を集合として, $x \in X$ に関する性質を述べた命題関数を $P(x), Q(x)$ とする. すべての $x \in X$ に対して, $P(x) \to Q(x)$ が真になるとき, つまり,

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \tag{2.5}$$

が成り立つとき, $P(x)$ を $Q(x)$ であるための**十分条件**, $Q(x)$ を $P(x)$ であるための**必要条件**という.

命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して集合

$$A = \{x \in X \mid P(x)\}, \qquad B = \{x \in X \mid Q(x)\}$$

が定義される. ここで, $x \in X$ が A に属するとは, x に対する命題 $P(x)$ が真であることを意味する. したがって, (2.5) は,

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$$

を意味し, 定義によって, $A \subset B$ に他ならない.

例 2.1　自然数 $x \in \mathbb{N}$ に対して, 「x は 6 の倍数である」という命題を $P(x)$, 「x は 2 の倍数である」という命題を $Q(x)$ とする. 対応する集合を A, B とすると, A は自然数で 6 の倍数の集合, B は自然数で 2 の倍数の集合になる. 明らかに, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ であり, $A \subset B$ である. このとき, 自然数 x について「x が 6 の倍数である」ことは「x が 2 の倍数である」ための十分条件であり, 「x が 2 の倍数である」ことは「x が 6 の倍数である」ための必要条件である.

なお, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ かつ $Q(x) \Rightarrow P(x)$ が成り立つとき, つまり, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ のとき, $P(x)$ は $Q(x)$ であるための**必要十分条件**, または, $Q(x)$ は $P(x)$ であるための必要十分条件, あるいは, $P(x)$ と $Q(x)$ は同値な条件であるという.

■ **空集合** 空集合 $\emptyset$ は任意の集合 A の部分集合, つまり,

$$\emptyset \subset A \tag{2.6}$$

が成り立つ. 実際, 定義によって, (2.6) は任意の a に対して,

$$a \in \emptyset \ \Rightarrow \ a \in A \tag{2.7}$$

と同値である. 空集合に属する元は存在しないので, 前件 $a \in \emptyset$ は偽である. よって, 後件 $a \in A$ の真偽によらず (2.7) は成り立ち, (2.6) が示された. なお, (2.7) の対偶「$a \notin A \Rightarrow a \notin \emptyset$」を示してもよい (こちらのほうが納得し易いかもしれない). (2.6) において A は任意の集合であるから, 特に $A = \emptyset$ とすれば, $\emptyset \subset \emptyset$ がわかる.

例 2.2 数の集合について

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

が成り立つ. むろん, すべて真部分集合であるから,

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

も成り立つ.

定 理 2.3 (包含関係に関する基本法則) 集合 A, B, C に対して次が成り立つ.

(1) [反射律] $A \subset A$.
(2) [反対称律] $A \subset B$ かつ $B \subset A \Rightarrow A = B$.
(3) [推移律] $A \subset B$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

証 明 (1)「$x \in A \Rightarrow x \in A$」は明らかであり, $A \subset A$ が成り立つ.

(2) $A \subset B$ は「$x \in A \Rightarrow x \in B$」を意味し, $B \subset A$ は「$x \in B \Rightarrow x \in A$」を意味する. したがって, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ は集合の相等の定義に他ならず, $A = B$ が成り立つ.

(3) $A \subset B$ は「$x \in A \Rightarrow x \in B$」を意味し, $B \subset C$ は「$x \in B \Rightarrow x \in C$」を意味する. 三段論法を適用すれば,「$x \in A \Rightarrow x \in C$」が成り立ち, $A \subset C$ がわかる. ∎

例 2.4 次の 2 つの集合

$$A = \{10m + 6n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \qquad B = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

について $A = B$ を示してみよう．2 つの集合が一致することを示すための基本は反対称律であり, 証明は 2 つの包含関係 $A \subset B$ と $B \subset A$ に帰着される．

まず, $A \subset B$ を示す．A から任意に 1 つの元 a を取り出すと, A の定義から適当な $m, n \in \mathbb{Z}$ を用いて $a = 10m + 6n$ のように表記される．そうすると,

$$a = 10m + 6n = 2(5m + 3n)$$

である．$k = 5m + 3n$ とおけば, $k \in \mathbb{Z}$ であり, $a = 2k$ が成り立つので, $a \in B$ である．こうして, $a \in A \Rightarrow a \in B$ が示されたので, $A \subset B$ が成り立つ．

次に, 逆の包含関係 $B \subset A$ を示す．こちらは少し工夫がいる．たとえば,

$$2 = 10 \times 2 - 6 \times 3 \tag{2.8}$$

に注意する．さて, B の任意の元 b は適当な $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $b = 2k$ と表示できる．これに (2.8) を代入すると,

$$b = 2k = 10 \times 2k + 6 \times (-3)k$$

となる．ここで, $m = 2k$, $n = -3k$ とおくと, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ であり, $b = 10m + 6n$ が成り立つ．したがって, $b \in A$ がわかり, $B \subset A$ が示された．

■ **べき集合** 集合 A の部分集合をすべて集めてできる集合 (あるいは集合族) を A の**べき集合**といい, 2^A で表す．たとえば, $A = \{1, 2, 3\}$ のべき集合は,

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

となる．空集合のべき集合は,

$$2^\emptyset = \{\emptyset\}$$

であり, $2^\emptyset$ は 1 個の元 $\emptyset$ からなる．べき集合の記号 2^A は一見すると奇妙であるが, 集合の直積や写像の集合とよく整合がとれているうまい記号なのである (第 6.4 節)．ここでは, 問 2.4 にその片鱗が見て取れる．

問 2.2 $A \subset B$, $B \subsetneq C$ であれば, $A \subsetneq C$ であることを示せ．

問 2.3 次の 2 つの集合は一致することを示せ.

$$A = \{6m - 15n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

問 2.4 有限集合 A に対して, $|2^A| = 2^{|A|}$ が成り立つことを示せ (厳密な議論は, 定理 6.27 を参照).

2.3 ラッセルのパラドックス

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて, 数学は論理に帰着しうるという思想 (論理主義) が盛んになった. その最初の論客はフレーゲであった. フレーゲは, 論理主義の立場から, 自然数論と実数論を純粋に論理から組み立てようとして「算術の基本法則」(1893) を著した. 広くは読まれなかったようであるが, この本を手にしたラッセル[9)]はフレーゲに書簡を送り, 後年, **ラッセルのパラドックス**と呼ばれることになる矛盾を指摘した (1902 年). フレーゲはすぐに返信して, 指摘された矛盾に大変狼狽したこと, その原因の可能性をいくつかあげて熟考を要することを伝えた. その後, 手紙のやり取りが続いた. フレーゲは, 自らが建設し完成させたと確信したであろう理論の基礎にひびが入り, 建物が崩壊する様子をどのように受け止めたのだろうか. ちょうど印刷が終わりかけていた「算術の基本法則 第 2 巻」(1903) のあとがきでは, ラッセルのパラドックスに言及して, それをいかに解消するかについての議論が加えられた. しかしながら, 根本的な解決には至らなかった.

ラッセルは述語論理を用いて矛盾を指摘したが, それを集合の言葉に翻訳すると次のようになる. まず, 集合は次の 2 種類に分類できる.

[第 I 種] 自分自身をその元として含む: $X \in X$

[第 II 種] 自分自身をその元として含まない: $X \notin X$

第 I 種集合としては, 例えば, 「すべての集合の集合」「食べられないものの集合」「無生物の集合」などが考えられる. ここで第 II 種集合をすべて集めてでき

[9)]Bertrand Arthur William Russell (1872–1970). イギリスの哲学者, 論理学者, 数学者. ノーベル文学賞を受賞 (1950). 第 2 次世界大戦前に渡米して, プリンストン高等研究所で, アインシュタイン, ゲーデル, パウリらとよく議論したという. 多数の著作があり, 幸福論や教育論でも知られる. 核廃絶をめざす「ラッセル–アインシュタイン宣言」(1955) をはじめ, 政治的活動も行った.

る集合を K とおこう．つまり,

$$K = \{X \mid X \notin X\}. \tag{2.9}$$

K は第 I 種であるか, あるいは第 II 種であるかのいずれかである．まず, K は第 I 種ではない．なぜならば, 第 I 種であれば, $K \in K$ が成り立たねばならないが, 集合 K の定義から, このような K は集合 K の元にならないので, $K \notin K$ となる．これは K を第 I 種であるとした初めの仮定に矛盾する．ならば, K は第 II 種集合だろうか．K が第 II 種集合であれば, その定義から $K \notin K$．この性質をもつ集合は, 集合 K の定義 (2.9) によって K に属するから $K \in K$．これもまた矛盾である．そうすると, 集合 K は第 I 種でもなく, 第 II 種にもなりえず, 排中律に反するたいへん困った事態となる．これが**ラッセルのパラドックス**である．ただし, 同じパラドックスがツェルメロによって, やや早い時期に独立に発見されていた.[10)]

当時, ラッセル自身も論理主義の立場から数学を展開する研究を行っていたが, 類似のパラドックス (濃度の集合や順序数の集合など) が次々に発見され, 数学の基礎付けの危うさ, いわゆる「数学の危機」を招くこととなった．ラッセルは,「型理論」(1903) によってパラドックスを解消し, その後, ホワイトヘッドとの共著「数学原理」(1910–1913．全 3 巻, 2000 ページに迫る大著) によって, 高階述語論理上で全数学を展開するという取組みを推進した (ちなみに第 1.4 節で扱った述語論理は一階述語論理である)．しかしながら, 数学の本質的な課題である「無限」を純粋に論理学だけで取り扱うことの困難さは残った．さらに, 後年, ゲーデル[11)]の「不完全性定理」が現れるに至って, 全数学を論理学の上に構築する試みは挫折したと言える．

ラッセルのパラドックスは集合論の矛盾を突いているように見えるが, 今日から見れば, 何が集合であり何が集合でないのかを設定し切れていなかったということである．厳密を旨とする現代数学では, 一群の公理系を設定して, それのみを用いて論理的に導き出された結果を集積することで理論が構築される．集合論も例外ではなく, パラドックス解消の努力の中で, 集合の定義 (公理) が明確

[10)]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)．ドイツの数学者, 論理学者．集合論の基礎付けに大きな貢献がある．たとえば, 今日, 広く受け入れられている ZF 公理系 はツェルメロが提案したものである (第 3.3 節)．「ラッセルのパラドックス」の発見については [52] が参考になる．

[11)]Kurt Gödel (1906–1978) オーストリア・ハンガリー帝国生まれの数学者, 論理学者．1939 年にナチスから逃れて, アメリカ合衆国に移住し, プリンストン高等研究所の教授となった．1931 年に発表された「不完全性定理」は, 人間の理性の限界を示すものとまで評され, 20 世紀の数学基礎論にとって最も重要な成果となった．金子 [8], 田中 [12] などに解説がある．

化されて, **公理的集合論**が構築された. 結局, ラッセルのパラドックスを引き起こす K は集合とは認めないこととなった. 矛盾を引き起こした問題を先送りして, 根本的解決から逃げてしまったようにも見えるが, 多くの人々の努力によって現代数学を展開する上で十分な自由度が確保された集合論が出来上がっている. なお, 集合の公理については, 第 3.3 節で少し触れることにする.

本書は古典的集合論に基づいているので, ラッセル流の矛盾から逃れられないのだが, 具体的な全体集合を決めてその部分集合に対して, 基本的な集合演算を扱うのであれば問題はない. 一方, すべての集合の集まりなどを集合として扱ってはならないのだが, 集合の範囲を厳格化するためには公理的集合論に訴えるしかない. 曖昧さは残るが, 扱う集合を自由過ぎない範囲に収めるということで満足して先に進もう.