第 3 章　集合の演算

本章では, 集合の基本的な演算 (集合算) を整理する. 関連して, 集合の公理を紹介して, 集合という概念にはどのような性質が期待されているのかを見ておきたい.

3.1　和集合と積集合

2 つの集合 A と B の元をすべて集めてできる集合を**和集合**あるいは**合併集合**といい, といい,

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ または } x \in B\}$$

のように表す. また, A と B に共通に含まれる元を全部集めてできる集合を**積集合**あるいは**共通部分**といい,

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \,|\, x \in A,\ x \in B\}$$

のように表す. 2 つの集合 A, B に対して, $A \cap B = \emptyset$ が成り立つとき, A, B は**互いに素**であるといい, $A \cap B \neq \emptyset$ のとき A と B は**交わる**という.

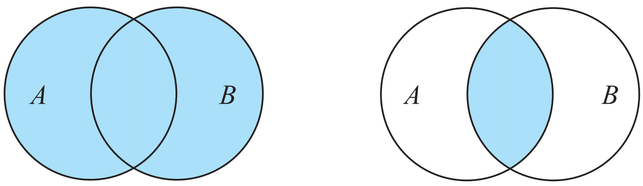

図 3.1: 和集合 $A \cup B$ と積集合 $A \cap B$

定義によって,

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \vee (x \in B), \tag{3.1}$$
$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B) \tag{3.2}$$

が成り立つ．また, 内包的記法で表された 2 つの集合 $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$ に対して,

$$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}, \qquad A \cap B = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$$

が成り立つ. 慣例にしたがって, $A \cap B = \{x \mid P(x), Q(x)\}$ とも書く.

以下, 集合の和と積に関する基本的な法則を順に述べてゆこう. これらの法則は, ベン図を用いれば容易に納得されるが, 視覚に訴えるだけでは証明とは言えないことに注意しておく.

定 理 3.1 (交換法則) 集合 A, B に対して,

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

定 理 3.2 (べき等法則) 集合 A に対して次が成り立つ.

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

定 理 3.3 (空集合を含む和と積) 集合 A に対して次が成り立つ.

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

上の 3 つの定理は, 定義から直ちに示される. (3.1), (3.2) に論理演算の基本法則を適用してもよい.

定 理 3.4 集合 A, B に対して,

$$A \subset A \cup B, \qquad A \cap B \subset A.$$

証 明　$A \cup B$ は A と B の元をすべて集めたものなので, 当然 A の元をすべて含む. したがって, $A \subset A \cup B$ が成り立つ. $A \cap B$ は A の元であって B の元でもあるものをすべて集めたものなので, 当然 A の部分集合である. したがって, $A \cap B \subset A$ が成り立つ. ∎

定理 3.5 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

(1) $A \subset C$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.
(2) $C \subset A$ かつ $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$.

証明　(1) $a \in A \cup B$ とすると, $a \in A$ または $b \in B$ である. $a \in A$ であれば, 仮定 $A \subset C$ から $a \in C$ である. また, $a \in B$ であれば, 仮定 $B \subset C$ からやはり $a \in C$ である. いずれにせよ, $a \in C$ であるから $A \cup B \subset C$ が示された.

(2) $a \in C$ とすると, 仮定 $C \subset A$ から $a \in A$ であり, 仮定 $C \subset B$ から $a \in B$ でもある. したがって, $a \in A \cap B$ となり, $C \subset A \cap B$ が成り立つ. ∎

定理 3.5 によって, $A \cup B$ は A と B を含む集合のうち最小のものであり, $A \cap B$ は A と B の両方に含まれる部分集合のうち最大のものである.

集合演算に関する等式を続けよう. その証明の基本は反対称律 (定理 2.3) であるが, 論理演算の基本法則を用いることもできる. 以下では, どちらかの方法で証明を与えているので, もう 1 つの方法も試みよ.

定理 3.6 集合 A, B が $A \subset B$ を満たせば,

$$A \cup B = B, \qquad A \cap B = A.$$

証明　1 番目の等式を示す (2 番目の等式も同様). まず, $B \subset A \cup B$ は定理 3.4 で示した通りである. 逆向きの包含関係を示そう. 仮定 $A \subset B$ と明らかな包含関係 $B \subset B$ に定理 3.5 と定理 3.2 を適用すれば, $A \cup B \subset B$ となる. ∎

定理 3.7 (吸収法則) 集合 A, B に対して, 次が成り立つ.

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$

証明　1 番目の等式を示そう (2 番目の等式も同様である). まず, 定理 3.4 より $A \cap B \subset A$ である. これに定理 3.6 を適用すると, $A \cup (A \cap B) = A$ が得られる. ∎

定理 3.8 (結合法則) 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

証 明　1 番目の等式を示そう (2 番目の等式も同様である). まず, 和集合の定義によって,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる. 同様に,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

である. 論理演算の結合法則 (定理 1.10) によって, (3.3) と (3.4) は同値であるから, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ が成り立つ. ∎

■ 多数の集合の和と積　結合法則によって, 3 個の集合 A_1, A_2, A_3 の和集合について,

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \tag{3.5}$$

が成り立つ. したがって, (3.5) を単に,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

と書くことが許される. なぜならば, 2 つある $\cup$ のどちらから演算を始めても同じ結果が得られるからである. 同様に, n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して, それらの和集合

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \tag{3.6}$$

が演算 $\cup$ の繰り返しで定義される. さらに, 交換法則によって $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の順序を任意に入れ替えても結果は同じである. 積集合についても同様であって,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3\,, \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \tag{3.7}$$

のように書く. 結果として, (3.6) は少なくとも 1 つの A_k に含まれる元をすべて集めた集合であり, (3.7) はすべての A_k に共通に含まれる元をすべて集めた集合となる.

定 理 3.9 (分配法則) 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{3.8}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{3.9}$$

証 明 (3.8) を 2 通りの包含関係によって示す (図 3.2 (左) も参照せよ). (3.9) も同様であるので, 詳細は読者に委ねよう.

まず, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す. $x \in A \cup (B \cap C)$ とする. 和集合の定義から, 次の 2 通りの場合が考えられる.

(i) $x \in A$,　(ii) $x \in B \cap C$.

(i) の場合は, $x \in A \cup B$ と $x \in A \cup C$ が同時に成り立ち, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ がわかる. (ii) の場合は, $x \in B$ かつ $x \in C$ である. したがって, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$, つまり, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成り立つ. いずれの場合も $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成り立つ.

次に, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. 積集合の定義から, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である. 示したいことは, $x \in A \cup (B \cap C)$ である. x について, 次の 2 通り

(i) $x \in A$,　(ii) $x \notin A$

に場合分けする. まず, (i) ならば $x \in A \cup (B \cap C)$ は明らか. (ii) の場合を考える. $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ がわかっているが, $x \notin A$ なので, $x \in B$ かつ $x \in C$ でなくてはならない. つまり, $x \in B \cap C$ である. したがって, $x \in A \cup (B \cap C)$ である. いずれの場合も, $x \in A \cup (B \cap C)$ が成り立つ. ∎

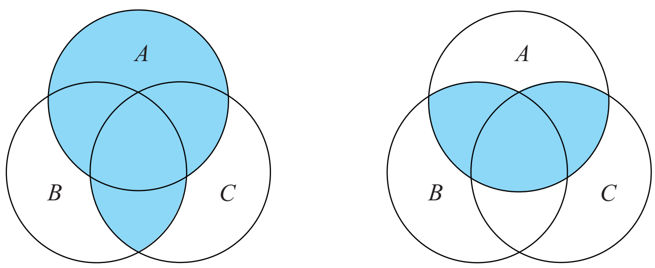

図 3.2: 分配法則 (3.8) と (3.9)

問 3.1 (定理 3.6 参照) 2 つの集合 A, B について, 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(i) $A \subset B$,　(ii) $A \cup B = B$,　(iii) $A \cap B = A$.

問 3.2 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

問 3.3 集合 $A_1, \ldots, A_n, B$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Bigr) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B),$$
$$\Bigl(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Bigr) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

3.2 差集合と補集合

集合 A, B の和を定義したので, その逆演算である差を考えることは自然である. しかし, 大小が備わっている実数の場合とは少し様子が異なる. 集合 A に属するが B には属さない元をすべて集めてできる集合を A と B の**差集合**といい, $A \backslash B$ または $A - B$ と書く. つまり,

$$A \backslash B = \{x | x \in A,\ x \notin B\}$$

である. 言い換えれば,

$$x \in A \backslash B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

である. もちろん, $A \backslash B$ と $B \backslash A$ は異なる. また, 任意の集合 A に対して,

$$A \backslash A = \emptyset, \qquad A \backslash \emptyset = A, \qquad \emptyset \backslash A = \emptyset$$

が成り立つことは明らかだろう.

定 理 3.10 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ.

$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C), \tag{3.10}$$
$$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C). \tag{3.11}$$

証 明　(3.10) を示す．(3.11) も同様である．まず，

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \backslash C \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in C) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \neg(x \in C) \end{aligned}$$

となる．ここで, 論理和と論理積に関する分配法則を用いれば,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ((x \in A) \wedge \neg(x \in C)) \vee ((x \in B) \wedge \neg(x \in C)) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \backslash C) \vee (x \in B \backslash C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \backslash C) \cup (B \backslash C). \end{aligned}$$

したがって, $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ が成り立つ． ■

定 理 3.11 (ド・モルガンの法則)　集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ．

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B), \tag{3.12}$$

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B). \tag{3.13}$$

証 明　(3.12) を示す (図 3.3 (左) も参照)．(3.13) も同様であるので, 詳細は読者に委ねる．まず,

$$\begin{aligned} x \in C \backslash (A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in C) \wedge \neg(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in C) \wedge \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \end{aligned}$$

となる．ここで, 論理演算に対するド・モルガンの法則 (定理 1.13) を適用すると

$$\Leftrightarrow \quad (x \in C) \wedge (\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$$

が得られる．さらに, 論理式に対するべき等法則, 交換法則, 結合法則を用いれば,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ((x \in C) \wedge \neg(x \in A)) \wedge ((x \in C) \wedge \neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in C \backslash A) \wedge (x \in C \backslash B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (C \backslash A) \cap (C \backslash B) \end{aligned}$$

となる．したがって, $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$ が成り立つ． ■

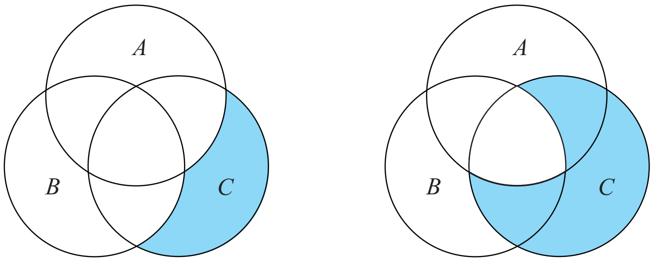

図 3.3: ド・モルガンの法則 (3.12) と (3.13)

問 3.4 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つことを示せ.

(1) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

(2) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap B \cap C)$.

問 3.5 2 つの集合 A, B に対して, 次に 2 条件は同値であることを示せ.

(i) $A \backslash B = A$,　(ii) $A \cap B = \emptyset$.

問 3.6 2 つの集合 A, B に対して, 次に 3 条件は同値であることを示せ.

(i) $A \subset B$,　(ii) $A \backslash B = \emptyset$,　(iii) $B \backslash (B \backslash A) = A$.

問 3.7 A を空でない集合, $a \in A$ とする. 集合 B が $A \backslash \{a\} \subset B \subset A$ を満たせば, $B = A$ または $B = A \backslash \{a\}$ であることを示せ.

■ **対称差集合** 2 つの集合 A, B に対して,

$$A \ominus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \tag{3.14}$$

を A と B との**対称差集合**[1]と呼ぶ. なお, (3.14) の 2 番目の等式は容易に示される. 定義から, 任意の集合 A に対して,

$$A \ominus A = \emptyset, \qquad \emptyset \ominus A = A \ominus \emptyset = A$$

は明らかである.

[1]別の記号 $A \triangle B$ も用いられる.

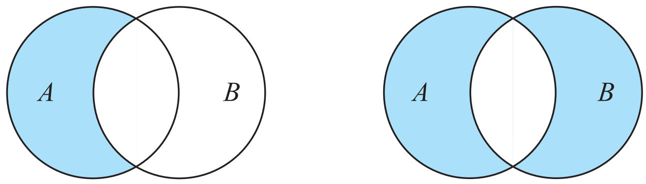

図 3.4: 差集合 $A\backslash B$ と対称差集合 $A \ominus B$

問 3.8 集合 A, B, C に対して次が成り立つことを示せ．

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C).$$

問 3.9 集合 A, B に対して，$A \ominus X = B$ を満たす集合 X を求めよ．

■ **補集合** 全体集合 X があらかじめ与えられていて，その部分集合だけが考察の対象になっていることが多い．そのときは，部分集合 $A \subset X$ に対して，差集合

$$A^c = X\backslash A$$

を A の (X に関する) **補集合**[2]という．集合 $A = \{x \in X \,|\, P(x)\}$ に対しては，

$$A^c = \{x \in X \,|\, \neg P(x)\}$$

となる．

例 3.12 $A = \{2, 3, \ldots\}$ とする．全体集合を自然数 $\mathbb{N}$ とすれば，

$$A^c = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \notin A\} = \{1\}$$

となる．全体集合を整数 $\mathbb{Z}$ とすれば，

$$A^c = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \notin A\} = \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$$

となる．補集合を考えるときは，全体集合があらかじめ指定されていることが前提である．

[2]補集合の記号 A^c は complement の頭文字に由来する．$\bar{A}$ もよく使われるが，こちらは別の意味の場合もあるので注意．

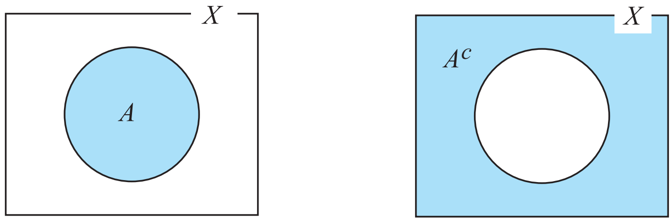

図 3.5: 補集合 A^c

定 理 3.13 (集合の補集合に関する基本法則) X を全体集合, A, B をその部分集合とするとき, 次が成り立つ.

(1) $X^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = X$.

(2) $A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = X$.

(3) $(A^c)^c = A$.

(4) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

(5) [ド・モルガンの法則] $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

問 3.10 定理 3.13 を証明せよ.

問 3.11 X を全体集合, A, B をその部分集合とするとき, 次を示せ.

(1) $A \backslash B = A \cap B^c$.

(2) $A \ominus B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$.

■ **双対原理** 有限個の集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して和集合 $\cup$, 積集合 $\cap$ を組み合わせて得られる集合を $P(A_1, \ldots, A_n)$ とするとき, 和集合と積集合を一斉に入れ替えてできる集合を $P^*(A_1, \ldots, A_n)$ とする. たとえば,

$$P(A_1, A_2, A_3) = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

に対しては

$$P^*(A_1, A_2, A_3) = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$$

となる. $Q(A_1, \ldots, A_n)$ を同様な集合として, もし, すべての集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して

$$P(A_1, \ldots, A_n) \subset Q(A_1, \ldots, A_n) \tag{3.15}$$

が成り立てば, すべての集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して

$$P^*(A_1, \ldots, A_n) \supset Q^*(A_1, \ldots, A_n) \tag{3.16}$$

が成り立つ. 実際, (3.15) と (3.16) は補集合をとる演算で移り合う.

そうすると, すべての集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して

$$P(A_1, \ldots, A_n) = Q(A_1, \ldots, A_n)$$

ならば,

$$P^*(A_1, \ldots, A_n) = Q^*(A_1, \ldots, A_n)$$

も成り立つ. たとえば, 分配法則 (定理 3.9) と呼ばれる 2 つの等式

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3),$$
$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

を思い出そう. このうち一方が示されれば, 他方は自動的に従うというのが双対原理である.

3.3　集合の公理

ラッセルのパラドックスなどを解消する努力の中で, 一群の公理系から出発する公理的集合論が構築されてきた. 公理系の設定の仕方は何通りかあるが, 以下では, ZFC 公理系を紹介しながら, 集合にどのような性質が期待されて, それがどのように表現されるかを見ておこう. 公理的集合論では, 対象とする「もの」はすべて集合であり, 現れる文字 $A, B, \ldots, a, b, \ldots$ はすべて集合と理解する. そして, 集合間の関係として, 等式 $A = B$ と帰属関係 $A \in B$ だけから理論を構築する. したがって, 集合の元も集合であると認識しなければならない.

■ **等号の公理**　集合の公理に先立ち, 等号に関する公理は当然のものとする.

[反射律] $A = A$.

[代入法則] 任意の命題関数 $P(x)$ に対して, $P(A)$ かつ $A = B \Rightarrow P(B)$.

上の 2 つの公理から次の 2 つの性質が導かれる.

[対称律] $A = B \Rightarrow B = A$.

[推移律] $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

対称律を導いてみよう．命題関数 $P(x)$ を $x = A$ とすれば, 反射律によって $P(A)$ が真. 仮定から $A = B$ は真なので, 代入法則によって $P(B)$ も真である. これは $B = A$ が成り立つことを示す．推移律も同様である.

代入法則を省いて, 残りの 3 つの性質を等号の公理と呼ぶこともある.

■ **ZF 公理系**　以下に述べる集合の公理 (S1)–(S9) を **ZF 公理系**という.[3)]

(S1) 外延性の公理　集合はその元によって決まるという集合の相等を定義する.

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

これは, 2 つの基本式 $A = B$, $A \in B$ の関係を述べている．なお, 等号の公理によって, $\forall A \forall B(A = B \to \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B))$ は当然成り立つ．さらに, 集合の包含関係 $A \subset B$ が $\forall x(x \in A \to x \in B)$ によって定義される.

以下, 公理が続くが, それらはすべて, ある条件を満たす集合が存在するという形をとる．その集合が一意的であることは外延性の公理から従う.

(S2) 空集合の公理　元をもたない集合が存在する.

$$\exists A \forall x(x \notin A)$$

そのような集合は一意的であり, 空集合と呼び, $\emptyset$ で表す.

(S3) 対の公理　任意の x, y に対して, x と y のみを元とする集合が存在する.

$$\forall x \forall y \exists A \forall z(z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

そのような集合は一意的であり, $\{x, y\}$ で表す．ただし, $x = y$ のときは, $\{x, x\} = \{x\}$ と書く．特に, $x \in \{x, y\}$, $y \in \{x, y\}$ が成り立つ.

2 つの元 x, y を順序も考慮して組にしたものを (x, y) と書いて**順序対**という. つまり, 順序対は,

$$(x, y) = (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x = x' \text{ かつ } y = y'$$

によって特徴付けられる．対の公理によって順序対が導入できる．たとえば, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ とすればよい．単に, $\{x, y\}$ では順序対にならない.

[3)] これはツェルメロが発表した公理系 [59](1908) をもとにフレンケル (Adolf Abraham Halevi Fraenkel, 1891–1965. ドイツ出身の数学者), スコーレム (Thoralf Albert Skolem, 1887–1963. ノルウェーの数学者) らが改良したもので, 1920 年代に形が整った.

(S4) 和集合の公理 任意の X の元もまた集合なので, それらの集合の元をすべて集めることでできる集まりが集合であることを保証する.

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists x \in X (t \in x))$$

そのような集合は一意的である. これを X の和集合と呼び, $\bigcup X$ で表す. 特に, $X = \{x, y\}$ のときは, $\bigcup\{x, y\} = x \cup y$ と書く. そうすると, 任意の x に対して $x \cup \emptyset = x$ となる.

(S5) べき集合の公理 任意の X に対して, X の部分集合全体の集合が存在する.

$$\forall X \exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow x \subset X))$$

そのような集合は一意的に定まり, X のべき集合と呼び, 2^X で表す.

(S6) 無限公理 空集合を元として含み, かつ, 任意の元 x に対して $x \cup \{x\}$ も元として含む集合が存在する.

$$\exists A (\emptyset \in A \land \forall x \in A (x \cup \{x\} \in A))$$

ただし, そのような集合 A の一意性については何も言っていない.

対の公理と和集合の公理によって, 集合 x に対して $x \cup \{x\}$ が集合になる. この集合を $x^+ = x \cup \{x\}$ と書こう. 空集合 $\emptyset \in A$ から始めると, $\emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$ のような集合が次々に定義されて A の元になる. このことから A は無限個の元を含むことになる. 無限公理では, 無限集合の存在を「...」を用いないで保証しているところが重要である. 実は, 集合列 $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$ によって, 0 および自然数 $1, 2, \ldots$ を定義することができる (第 15 章で扱う).

(S7) 分出公理 (または部分集合の公理) 集合 X の部分集合が, その元の性質を規定することで定義される. つまり, X の元 x で性質 $P(x)$ をみたすもの全体からなる集合が存在する.

$$\forall X \exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow (x \in X \land P(x)))$$

そのような集合 A は一意的に定まる. これを $\{x \in X \mid P(x)\}$ で表す. 特に, $X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}$ と書く.

分出公理はツェルメロが初めに提案したものだが, その後, 適用範囲が不十分であることが, フレンケルとスコーレムによって独立に指摘され, 次の置換公理に差し替えられた. 実際, 分出公理は置換公理とほかの公理から導かれる.

(S8) 置換公理　$P(x,y)$ を集合の対 (x,y) の性質とする．集合 A のすべての $x \in A$ に対して $P(x,y)$ を満たす y が存在すれば，そのような y をうまく集めて集合 B を作って，すべての $x \in A$ に対して $P(x,y)$ を満たす $y \in B$ が存在するようにできる．

$$\forall A(\forall x \in A\, \exists y\, P(x,y) \to \exists B\, \forall x \in A\, \exists y \in B\, P(x,y))$$

(S9) 基礎の公理　空でない集合 A には，すべての $y \in A$ に対して $y \notin x$ を満たす $x \in A$ が存在する．(このような x を $\in$ に関する A の極小元という.)

$$\forall A(A \neq \emptyset \to \exists x \in A \forall y \in A(y \notin x))$$

ここで，基礎の公理 (S9) の役割を見ておこう．

補 題 3.14　$x \in y$ と $y \in x$ を同時に満たす集合 x, y は存在しない．

証 明　集合 x, y が $x \in y$ と $y \in x$ を同時に満たしたとして矛盾を導こう．まず，対の公理によって $A = \{x, y\}$ も集合になり，A に基礎の公理を適用すれば，x または y が極小元になる．前者であれば $x \notin x$ と $y \notin x$ を意味し，後者であれば $x \notin y$ と $y \notin y$ を意味する．しかし，いずれも仮定に反する．■

定 理 3.15　集合 x, y に対して次が成り立つ．

(1) $x \in x$ を満たす集合は存在しない．
(2) $x \in y$, $x = y$, $y \in x$ のうち高々1 つだけ成り立つ．
(3) $\{x\} \subset x$ を満たす集合 x は存在しない．したがって，$x = \{x\}$ を満たす集合も存在しない．

証 明　(1) 補題 3.14 において $x = y$ とおけばよい．
(2) (1) と補題 3.14 を合わせればよい．
(3) $\{x\} \subset x$ から $x \in x$ が得られて (1) に矛盾する．■

定 理 3.16　集合 x に対して $x^+ = x \cup \{x\}$ とおく．2 つの集合 x, y が $x \neq y$ を満たせば $x^+ \neq y^+$ である．

証 明　$x^+ = y^+$, つまり $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ から矛盾を導けばよい．実際，$x \in x^+ = y \cup \{y\}$ なので $x \in y$ または $x = y$ となるが，仮定から $x \in y$ が得られる．同様に，$y \in y^+ = x \cup \{x\}$ から $y \in x$ が得られ，$x \in y$ と $y \in x$ が同時に成り立つ．これは補題 3.14 に反する．∎

定 理 3.17 集合の元の列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ で

$$x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$$

を満たすもの (無限下降列という) は存在しない．

証 明　集合 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が基礎の公理に反する．[4] ∎

■ **ZFC 公理系**　ZF 公理系に次にのべる選択公理 (S10) を追加したものを **ZFC 公理系**という．選択公理は ZF 公理系とは独立であることが知られているので，選択公理を認める立場と認めない立場がある．選択公理を用いないと証明できない定理もあるし，選択公理を用いた議論の結果，通常の数学的直観に反するような定理が証明されることがある．数学の議論の前提は，基本的には自由に設定してよいのだが，大多数の数学者は選択公理を認めているものと思われる．

(S10) 選択公理　ここでも集合の元はまた集合であることを思い出す．X は空集合を元として含まず，任意の 2 つの元が互いに素であるとき，すべての $x \in X$ に対して $x \cap A$ が 1 個の元だけからなるような集合 A が存在する．

$$\begin{aligned}&\forall X((\emptyset \notin X \land \forall x \in X \forall y \in X(x \neq y \to x \cap y = \emptyset))\\&\qquad \to \exists A \forall x \in X \exists t(x \cap A = \{t\}))\end{aligned}$$

直感的には，A は X の元であるところの各集合から 1 個ずつ元を取り出してまとめたものであり，それが集合になることを保証している．あるいは，このような操作で集合が構成できることを保証している．この A を**選択集合**と呼ぶ．選択公理の述べ方には何通りかあり，さらに同値な命題もいろいろ知られている．第 11 章で詳しく扱う (第 13.3 節も見よ)．

■ **ラッセルのパラドックス**　カントル流の素朴な定義では，命題関数 $P(x)$ に対して

$$\{x \mid P(x)\} \tag{3.17}$$

[4] 置換公理によって，写像の像集合は確かに集合になる．このことから A は集合である．

を集合と考える．そうすると, ラッセルが提示したように,

$$K = \{x \,|\, x \notin x\} \tag{3.18}$$

も集合となる．したがって, $K \in K$ かどうかを問うことができて, 矛盾に陥ってしまう (第 2.3 節)．これに対して, 分出公理では, 集合 X から $P(x)$ を満たすような元 x を切り分けることで, 集合

$$\{x \in X \,|\, P(x)\} = \{x \,|\, x \in X \wedge P(x)\} \tag{3.19}$$

が定義されることを言っている．(3.17) のように全く自由な $P(x)$ をとったのでは, X に相当するものがないので, (3.19) の形にできない．このことは重要である．つまり, ZF 公理系では, (3.18) は集合を定義していないので, そもそも集合として扱うべき対象から外れている．したがって, そのような K を集合のように扱って矛盾が生じたとしても, それは集合論の枠外の話であって, 集合論に何の影響も及ぼさない．

■ **BG 公理系** (3.17) のような「もの」も議論の対象に加えて理論体系を作ると便利なことがある．この立場から, ベルナイス (1937 年) が導入し, ゲーデルによって構成的集合論の枠組みとして採用された公理系を BG 公理系という．フォン・ノイマン[5)]も早い段階でこの立場をとっていたので, NBG 公理系とも呼ばれる．また, BG 公理系に選択公理を加えたものを BGC 公理系[6)] という．そこでは, (3.17) の形の対象を**クラス**と称して, 集合をクラスの特別なものとして定式化する．今日の集合論では, ZF 公理系と BG 公理系が主流となっているが, BG 公理系から導出される集合の公理は ZF 公理系と同等であることが知られている．

5) John von Neumann (1903–1957)．ハンガリー出身．1930 年にプリンストン高等研究所に招かれ, ナチスを避けてアメリカ合衆国に移住した．1933 年以降は同研究所教授．量子力学の基礎付け, 関連する独創的な数理分野の開拓, ノイマン型計算機の発明, モンテカルロ法の考案, ゲーム理論や気象予報理論の創始などに著しい成果を生み出し, 20 世紀最大の科学者と称される．原子爆弾の開発 (マンハッタン計画) や核政策への関与も大きい．無限下降列の非存在を集合論の公理に加えることを提案し, その後, 基礎の公理 (S9) として整えたのもフォン・ノイマンである [57] (1925)．

6) BGC 公理系の読みやすい解説が赤 [1] にある．田中 [12] も参考になる．