第5章　同値関係

前章では, 集合間の関係を議論するための概念として写像を導入した. 写像をさらに一般化したものが関係 (対応ともいう) である. 特に, 集合からそれ自身への関係を 2 項関係というが, その中で最も基本的な同値関係について述べる.

5.1　関　係

X, Y を集合とする. 順序対 $(x, y) \in X \times Y$ に対して, 満たすか満たさないかが判別できる規則 ρ を集合 X から Y への**関係**または**対応**という. 順序対 $(x, y) \in X \times Y$ が関係 ρ を満たせば, $x \rho y$ と書き, 満たさないときは $x \not\rho y$ と書く. ρ として $=, \leq, \equiv, \cong, \sim$ などさまざまな記号が文脈に応じて使われる.

集合 X から Y への関係 ρ に対して, 直積 $X \times Y$ の部分集合

$$G(\rho) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \rho y\}$$

を関係 ρ の**グラフ**という. 逆に, 直積 $X \times Y$ の任意の部分集合 Z に対して, $(x, y) \in Z$ のとき $x \rho y$ と定義すれば, ρ は集合 X から Y への関係になり, $G(\rho) = Z$ が成り立つ. この意味で, 集合 X から Y への関係を 1 つ定めることと直積 $X \times Y$ の部分集合を 1 つ定めることとは同等である.[1)]

■ **2 項関係**　特に, 集合 X からそれ自身への関係, つまり, 順序対 $(x, y) \in X \times X$ に対して, 満たすか満たさないかが判別できる規則 ρ を集合 X 上の **2 項関係**という. 集合 X 上の 2 項関係のグラフは $X \times X$ の部分集合であり, 逆に $X \times X$ の任意の部分集合に対して, それをグラフとする 2 項関係が定まる.

1) たとえば, $x, y \in \mathbb{R}$ が「関係 $x < y$ を満たす」と言っても, 集合 $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$ を用いて, $(x, y) \in G$ であると言っても同じことである. 「関係 $x < y$ を満たす」という述語表現を集合で言い換えるところが要点である.

例 5.1 $X = \{A, B, C, D\}$ を 4 人の集合, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を 5 つのウェッブサイトの集合とする. $x \in X$ が $y \in Y$ を訪問したことがあるとき, $x\rho y$ とすると, これは X から Y への関係になる. 図 5.1 左は, $x\rho y$ のときに x から y に向けて矢印を書いて図示したものである.

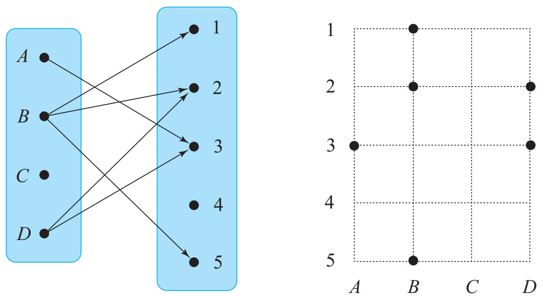

図 5.1: X から Y への関係とそのグラフ

例 5.2 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 項関係 $x\rho y$ を $X \times X$ の部分集合

$$\{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

に対応するものとして定義する. この 2 項関係は, X から X への対応, あるいはそのグラフとして図示することができるが, さらに, X を頂点集合とする有向グラフによる表示も役に立つ (図 5.2 最右).

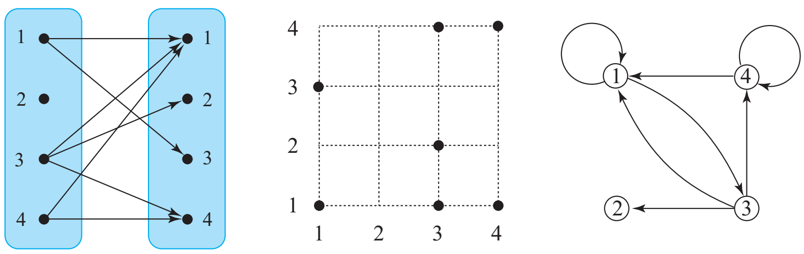

図 5.2: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 項関係

■ **写像** 写像は関係 (または対応) の特別なものである. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, $f(x) = y$ となっているとき $x\rho y$ として X から Y への関係が定義される. 一般の関係との違いは次の 2 点である.

(i) X の元は余すことなく Y の元に対応付けられる.
(ii) 各 $x \in X$ に対応する Y の元はただ 1 個である.

したがって, 例 5.1, 例 5.2 で与えた関係は写像ではない.

写像は関係の特別なものであるから, 関係に対して定義したグラフは写像に対しても定義される. このグラフは, 第 4.1 節ですでに定義した写像のグラフと同じものになる. さらに, 直積集合 $X \times Y$ の任意の部分集合 G が X から Y への関係のグラフになりうるのに対して, G が写像のグラフになるためには, すべての $x \in X$ に対して, $(x, y) \in G$ となる $y \in Y$ がただ 1 つ存在することが必要十分条件である (定理 4.1).

例 5.3 (隣接関係) 集合 X 上の 2 項関係 $\sim$ で, 次の 2 つの性質を満たすものを X 上の隣接関係という.

(i) すべての $x \in X$ に対して $x \not\sim x$,
(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

言い換えると, $X \times X$ の部分集合 E で

(i) すべての $x \in X$ に対して $(x, x) \notin E$,
(ii) $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$,

を満たすものが隣接関係である. 集合 X と隣接関係 E を組にした (X, E) を**グラフ**[2]という. X の各元を平面の点として配置して, $(x, y) \in E$ のときに, x と y を辺で結んでできる図形が, グラフ (X, E) のイメージである.

例 5.4 (順序関係) 集合 X 上の 2 項関係 $\preccurlyeq$ で, 次の 3 つの性質を満たすものを X 上の順序関係という.

(i) すべての $x \in X$ に対して $x \preccurlyeq x$,
(ii) $x \preccurlyeq y,\ y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$,
(iii) $x \preccurlyeq y,\ y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

---
[2] ここに述べたグラフは, 文脈によっては**ネットワーク**とも呼ばれる. 先に扱った関数のグラフ, 写像のグラフ, 関係のグラフとは異なる概念である. 図 5.2 にある有向グラフも同様である.

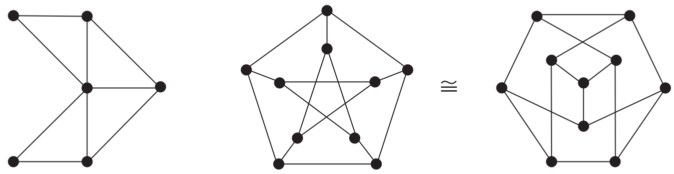

図 5.3: グラフ

たとえば, 実数の大小 $x \leq y$ は $\mathbb{R}$ 上の順序関係である. 順序関係については, 第 12 章で詳しく扱う.

問 5.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上の 2 項関係 $x\rho y$ を次のように定めるとき, その 2 項関係に対応する $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合を確認して, 関係のグラフと有向グラフを示せ.

(1) $x\rho y \Leftrightarrow y \leq x \leq y + 1$

(2) $x\rho y \Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y - 4) = 0$

5.2　同値関係

定 義 5.5 集合 X 上の 2 項関係 $\sim$ は, 次の 3 性質を満たすとき X 上の**同値関係**と呼ばれる.

(i) [反射律] $x \sim x$

(ii) [対称律] $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) [推移律] $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

数学のさまざまな文脈で使われる等号 $=$ は上の 3 条件を満たす. それを**等号の公理**ということもある. したがって, 集合 X を適切に定めれば, 等号 $=$ は X 上の同値関係になる.

例 5.6 ある大学の学生の全体を X とする. 学生 $x, y \in X$ に対して, 出身県が同じときに $x \sim y$ と定義すれば, $\sim$ は X 上の同値関係になる.

例 5.7 X を平面上のすべての三角形の集合とする. 2 つの三角形 x, y が合同であるとき, $x \equiv y$ とすれば, $\equiv$ は X 上の同値関係になる. また, 2 つの三角形 x, y が相似であるとき, $x \backsim y$ とすれば, $\backsim$ は X 上の同値関係になる.

例 5.8 (整数の合同) 自然数 m を 1 つ固定する．2 つの整数 x, y に対して, $x-y$ が m の倍数であるとき, x と y は m を**法として合同**であるといい,

$$x \equiv y \pmod{m}$$

と記す．これは, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係になる．このことを確認しておこう．以下では , m は 1 つ固定されているので $\pmod{m}$ を省略する．

(i) 反射律．すべての整数 x に対して, $x-x=0$ であり, 0 はもちろん m の倍数である．よって, $x \equiv x$.

(ii) 対称律．整数 x, y が $x \equiv y$ を満たすものとする．定義から, $x-y$ は m の倍数であるから, 別の整数 k によって, $x-y=km$ となる．そうすると, $y-x=-km$ であり, これも m の倍数である．よって, $y \equiv x$ となる．

(iii) 推移律．整数 x, y, z が $x \equiv y$, $y \equiv z$ を満たすものとする．定義から, $x-y=km$, $y-z=lm$ のように整数 k, l を用いて表される．そうすると, $x-z=(x-y)+(y-z)=(k+l)m$ となるから, これも m の倍数である．よって, $x \equiv z$ となる．

例 5.9 X を 2 個以上の元を含む集合として, X の空でない部分集合を集めてできる集合を Ω とする．つまり, $\Omega = 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Ω 上の 2 項関係 $A \sim B$ を $A \cap B \neq \emptyset$ のこととして定める．このとき, 関係 $\sim$ は反射律と対称律を満たすが, 推移律を満たさないので同値関係ではない．

問 5.2 $R = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく．2 つの実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $x-y \in R$ であるとき $x \sim y$ と定義する．この関係は反射律, 対称律, 推移律を満たすか．

問 5.3 $\mathbb{N}$ の 2 つの部分集合 A, B に対して, 対称差集合 $A \ominus B$ が有限集合であるとき, $A \sim B$ と定義する．このとき, $\sim$ はベキ集合 $2^{\mathbb{N}}$ 上の同値関係であることを証明せよ．

■ 同値類と商集合 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとする．$x \in X$ に対して x と同値な元を集めてできる X の部分集合

$$C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

を, x を含む**同値類**という．

補 題 5.10 同値類 $C(x)$ は X の部分集合であって次の性質をもつ.

(1) $x \in C(x)$.

(2) $x \sim y \Rightarrow C(x) = C(y)$.

(3) $x, y \in X$ に対して, $C(x) = C(y)$ または $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ のいずれか一方だけが成り立つ.

証 明　(1) 反射律 $x \sim x$ から明らかである.

(2) まず, $C(x) \subset C(y)$ を示そう. $z \in C(x)$ とすると, 同値類の定義から $z \sim x$ である. これと仮定 $x \sim y$ を合わせて, 推移律を用いると $z \sim y$ となる. したがって, $z \in C(y)$. である. こうして, $C(x) \subset C(y)$ が示された. x, y の役割を入れ替えて, 同様の議論を繰り返せば, $C(y) \subset C(x)$ も示されるので, $C(x) = C(y)$ である.

(3) 同値類は空集合ではないので, $C(x) = C(y)$ と $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ が同時に成り立つことはない. したがって, 主張のためには,

$$C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad C(x) = C(y)$$

を示せばよい. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ なので, $z \in C(x) \cap C(y)$ を満たす元 z をとる. 同値類の定義から $z \sim x$ かつ $z \sim y$ である. 推移律によって, $x \sim y$ となる. (2) によって, $C(x) = C(y)$ が得られる. ∎

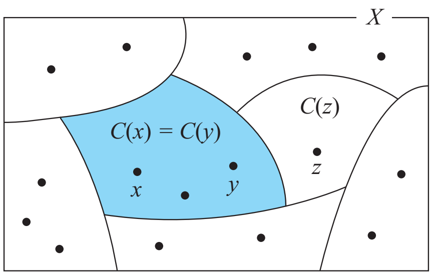

図 5.4: X の同値類別

補題 5.10 によれば, 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられると, 同値類によって X が互いに素な空でない部分集合に分割されることになる. これを X の同値関係 $\sim$ による**同値類別**という.

同値類を 1 つの元とみなして, 同値類を集めてできる集合を, X の同値関係 $\sim$ による**商集合**といい,

$$X/\sim = \{C(x) \mid x \in X\}$$

で表す. 商集合 $X/\sim$ は X の部分集合を元とする集合という意味で集合族である. 商集合 $X/\sim$ の元, つまり, 同値類 C はそれに含まれている X の元 x を 1 つ指定することで $C = C(x)$ のように表される. このとき, x をその同値類 C の**代表**という. 任意の $x \in C$ は C の代表になる.

X の各元 x に対して $C(x)$ を対応させることで写像

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim$$

が定義される. これを X から $X/\sim$ の上への**標準射影**, または**自然な射影**という. 明らかに, 標準射影 $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ は全射である.

例 5.11 (例 5.6 の続き) ある大学の学生の全体を X とする. 学生 $x, y \in X$ の出身県が同じときに $x \sim y$ として, X 上の同値関係 $\sim$ を定義した. このとき, 同値類 C とは, 出身県を同じくする学生の集合であり, 任意の $x \in C$ は C の代表元になる. 商集合 $X/\sim$ とは, 定義によって, 同値類を集めた集合のことであるが, 今の文脈では, 各同値類に県名というラベルをつけることができるので, $X/\sim$ は出身者のいる県の県名の集合とみなされる. この意味で, 標準射影とは各学生 $x \in X$ に対して出身県名を対応させる写像に他ならない.

■ 写像から誘導される同値類 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられたとする. X 上の 2 項関係 $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ を満たすこととして定義する. この 2 項関係は同値関係になることが次のようにして確かめられる.

(i) 反射律. $f(x) = f(x)$ であるから $x \sim x$ である.
(ii) 対称律. $f(x) = f(y)$ ならば $f(y) = f(x)$ である. したがって, $x \sim y$ ならば $y \sim x$ である.
(iii) 推移律. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, 定義によって, $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ である. したがって, $f(x) = f(z)$ であり, $x \sim z$ が成り立つ.

次に, 同値類について調べよう. 定義によって, x を含む同値類は

$$C(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

$$= \{y \in X \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

である．したがって，

$$X/\!\sim\, = \bigl\{f^{-1}(\{f(x)\}) \bigm| x \in X\bigr\} = \bigl\{f^{-1}(\{y\}) \bigm| y \in f(X)\bigr\}$$

となる．

例 5.12 X を平面上のすべての 3 角形の集合として，写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を 3 角形 $x \in X$ に対して，その面積を対応させるものとする．このとき，f の定める同値類は，同じ面積をもつ 3 角形の集合となる．言い換えれば，3 角形の全体を面積によって分類したことになる．

■ **整数の剰余類** 自然数 m を 1 つ固定し，整数の全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $x \equiv y \pmod m$ を考えよう (例 5.8)．定義によって，同値類は

$$\begin{aligned} C(0) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod m\}, \\ C(1) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod m\}, \\ &\cdots\cdots \\ C(m-1) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv m-1 \pmod m\} \end{aligned}$$

となる．これらの同値類を**法 m に関する剰余類**という．すべての自然数 x は，いずれか 1 つの $C(k)$ に属するので，商集合 $\mathbb{Z}/\!\equiv$ を $\mathbb{Z}_m$ と書けば，

$$\mathbb{Z}_m = \{C(0), C(1), \ldots, C(m-1)\}$$

となる．対応 $x \mapsto C(k)$ が標準射影 $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ である．

ところで，剰余類 $C(k)$ は，m で割ったときの余りが k となる整数の集合であるから，その代表元として余りを表す整数 k をとることができる．その意味で，しばしば，

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

のように扱うのが便利である．この場合，$x \in \mathbb{Z}$ に対して標準射影 $\pi(x)$ は，x を m で割ったときの余りに他ならない．

さて，$a, b \in \mathbb{Z}_m$ に対して，$\pi(x) = a$, $\pi(y) = b$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ をとったとき，$\pi(x+y)$ は代表元 x, y の選び方によらずに定まる．実際，$\pi(x) = \pi(x_1) = a$,

$\pi(y) = \pi(y_1) = b$ とすると, $x - x_1$ と $y - y_1$ はともに m の倍数である. したがって, $(x+y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1)$ も m の倍数になり, $\pi(x+y) = \pi(x_1+y_1)$ が成り立つ. つまり, $\pi(x+y)$ が代表元 x, y の選び方によらずに定まるから, 写像 $(a, b) \mapsto \pi(x+y)$ が定義される. これを $a+b = \pi(x+y)$ と書いて a, b の和という. 同様に, $\pi(xy)$ が代表元 x, y の選び方によらずに定まり, これによって, a, b の積 ab が定義される. 剰余類 $\mathbb{Z}_m$ はこのように定義された和と積をもつ重要な代数系になる.

問 5.4 法 $m = 5$ に関する剰余類を $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, \ldots, 4\}$ とする. $\mathbb{Z}_5$ の加法と乗法を一覧表に示せ.

問 5.5 法 $m = 6$ に関する剰余類を $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, \ldots, 5\}$ とする. $\mathbb{Z}_6$ の加法と乗法を一覧表に示し, $\mathbb{Z}_5$ との違いを調べよ.

■ 写像の分解

定 理 5.13 $f : X \longrightarrow Y$ を全射とする. このとき, X 上の同値関係 $\sim$ と, 全単射 $\tilde{f} : X/\!\sim \longrightarrow Y$ で $f = \tilde{f} \circ \pi$ を満たすものが存在する. ただし, $\pi : X \longrightarrow X/\!\sim$ は標準射影である.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\!\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

証 明　まず, X 上の同値関係 $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ として定める. 写像 $\tilde{f} : X/\!\sim \longrightarrow Y$ を, $C \in X/\!\sim$ に対して, $x \in C$ となる x を用いて $\tilde{f}(C) = f(x)$ と定義する. 与えられた C に対して $x \in C$ の取り方に任意性があるから, その取り方によらず $\tilde{f}(C)$ が一意に決まることを示す必要がある. つまり, 別の $y \in C$ をとって, $\tilde{f}(C) = f(y)$ と定義して, 先に定義した $\tilde{f}(C)$ と異なる値になっては, 写像 $\tilde{f}$ が定義できないからである. しかし, 同値類の定義から $f(x) = f(y)$ であるから, その心配はなく, $\tilde{f}(C)$ は同値類 C によって値が定まっている. こうして, 写像 $\tilde{f} : X/\!\sim \longrightarrow Y$ が得られた.

$\tilde{f}$ は全射であることを示そう．実際，f が全射であることから，任意の $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ で $y = f(x)$ となる．そうすると，x を含む同値類 C に対して，$\tilde{f}(C) = f(x) = y$ となり，$\tilde{f}$ が全射であることがわかる．

次に，$\tilde{f}$ は単射である．$\tilde{f}(C_1) = \tilde{f}(C_2)$ とする．代表元をとって，$x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ とすると，$f(x_1) = f(x_2)$ となる．したがって，$x_1 \sim x_2$ であり，$C_1 = C_2$ がわかる．

最後に，$f = \tilde{f} \circ \pi$ を示す．$x \in X$ とすると，$\pi(x)$ は x を含む同値類になる．$\tilde{f}(\pi(x))$ は同値類 $\pi(x)$ から任意の元をとり，その f による像で定義された．特に，$\pi(x)$ から x をとって，f による像 $f(x)$ が $\tilde{f}(\pi(x))$ を与える．したがって，$f(x) = \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f} \circ \pi(x)$. ∎

定 理 5.14 $f : X \longrightarrow Y$ を任意の写像とする．このとき，集合 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ と全射 $\pi : X \to \tilde{X}$, 全単射 $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$, 単射 $i : \tilde{Y} \to Y$ が存在して，次が成り立つ．

$$f = i \circ \tilde{f} \circ \pi. \tag{5.1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \tilde{Y} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

証 明　$\tilde{Y} = f(X)$ とおいて，写像 $F : X \to \tilde{Y}$ を $F(x) = f(x)$ で定義する．F は全射であるから，定理 5.13 を適用することができる．$\tilde{X} = X/\!\sim$ とおくと，$\pi : X \longrightarrow \tilde{X}$ が全射になり，全単射 $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ で

$$F = \tilde{f} \circ \pi$$

を満たすものが存在する．$\tilde{Y}$ は Y の部分集合なので，包含写像 $i : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ が定義されて，それは単射である．さらに，$f = i \circ F : X \longrightarrow Y$ に注意して，(5.1) が得られる． ∎

例 5.15 $X = Y = \mathbb{R}$ として, $f(x) = x^2$ で定義される写像 $f : X \longrightarrow Y$ を考える. まず, f による同値関係を $x \sim y$ と書けば,

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x$$

である. したがって, 商集合 $\tilde{X} = X/\sim$ に属する同値類の代表元を $[0, +\infty)$ から一意的に選ぶことができる. 言い換えれば, $\tilde{X} = [0, +\infty)$ とみなしてよい. そうすると, 標準射影 $\pi : X \longrightarrow \tilde{X}$ は $\pi(x) = |x|$ に他ならない. 一方, $\tilde{Y} = f(X) = [0, +\infty)$ は明らかであり, $i : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} = Y$ を包含写像とする. 最後に, $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ は, 定理 5.14 の証明にあるように, f を同値類の関数とみなしたものだから, $\tilde{f}(x) = x^2$ となる. 確かに $\tilde{f}$ は全単射であって, $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ が成り立つ.

例 5.15 で示唆されるように, 定理 5.14 に述べた写像 f の分解は, f の本質的な性質を $\tilde{f}$ として抜き出していると言える. 写像のこのような取扱いは代数系の議論において頻繁に現れる.