

第8章 非可算集合

カントルによる無限集合研究の大きな一歩は、有限集合に対する個数を無限集合にも通用する濃度という概念に拡張し、同じ無限集合でも濃度による階層が存在することの発見であった。つまり、自然数 $\mathbb{N}$ が可算集合であるのに対して、実数 $\mathbb{R}$ は非可算集合であることを証明したのである。

8.1 実数の区間

一般に、 $a \leq b$ なる 2 つの実数に対して、

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

と書いて、それぞれを閉区間、开区間という。ただし、 $a = b$ のとき、閉区間 $[a, a]$ は a のみからなり、开区間 (a, a) は空集合である。さらに、

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$

と定義する。上の 2 つは开区間でも閉区間でもなく、半开区間と呼ばれる。以上の 4 つの区間をまとめて有限区間という。長さが有限という意味である。一方が無限に延びているものは、

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \end{aligned}$$

のように定義する。¹⁾ 上の 2 つは閉区間、下の 2 つは开区間として扱う。

以下では、これらの区間の濃度を調べてゆく。

¹⁾ $\pm\infty$ は実数ではないので、 $[a, +\infty]$ や $[-\infty, b]$ のようには書かない。

定理 8.1 $a < b, c < d$ とするとき, 2つの閉区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ の濃度は等しい. また, 2つの开区間 (a, b) と (c, d) の濃度も等しい.

証明 実際,

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) \quad (8.1)$$

とおくと, f は $[a, b]$ から $[c, d]$ の上への全単射になる (図 8.1). さらに, f は开区間 (a, b) から (c, d) への全単射にもなっているので, 2つの开区間 (a, b) と (c, d) の濃度は等しい. ■

定理 8.2 任意の実数 $a < b$ に対して, 开区間 (a, b) と実数 $\mathbb{R}$ の濃度は等しい.

証明 関数

$$g(x) = \frac{-1}{x-a} + \frac{1}{b-x}, \quad a < x < b, \quad (8.2)$$

は (a, b) から $\mathbb{R}$ の上への全単射になる (図 8.1). したがって, 开区間 (a, b) と実数 $\mathbb{R}$ の濃度は等しい. ■

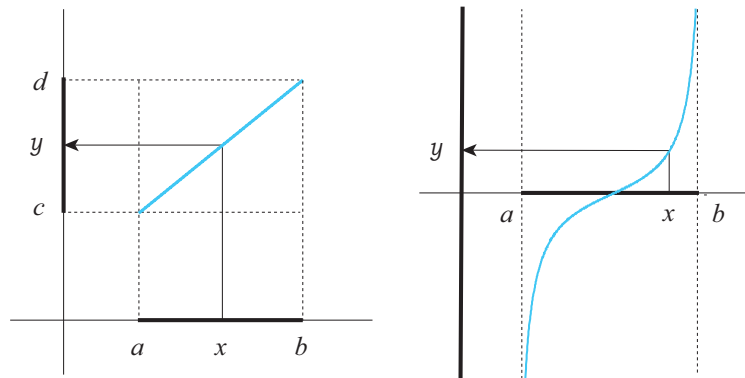


図 8.1: 全単射 $[a, b] \rightarrow [c, d]$ と $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

定理 8.3 閉区間 $[0, 1]$ と半开区間 $[0, 1)$ の濃度は等しい.

8.1. 実数の区間

117

証明 $x \in [0, 1]$ に対して,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in \{1 = 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots\}, \\ x, & \text{その他}, \end{cases} \quad (8.3)$$

とおくと, $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は全単射になる (図 8.2). ■

上の証明で用いた $f(x)$ のアイデアを見ておこう. まず, 閉区間 $[0, 1]$ と半开区間 $[0, 1)$ はともに無限集合で, 違いは元 1 個である. 全単射 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ として, $f(x) = x$ はどうかと言うと, $x = 1$ の像が $[0, 1)$ に含まれず困る. そこで, $f(1) = 1/2$ と修正すると, $f(1/2) = 1/2 = f(1)$ となり単射性が破れる. そこで, $f(1/2) = 1/4$ と取り直す. この修正を繰り返してできたのが, (8.3) に定義した全単射 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ である.²⁾

定理 8.4 閉区間 $[0, 1]$ と开区間 $(0, 1)$ の濃度は等しい.

証明 (8.3) で定義した $f(x)$ と同様のアイデアで全単射 $g: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ が定義すれば, 合成関数 $g \circ f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ が全単射になる.

ここでは, それとは別に, 全単射 $h: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ を 1 つ具体的に与えておく. まず, 無限数列

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots < \frac{1}{2}$$

を 1 つとる. たとえば,

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

とする. 同様に, 無限数列

$$1 = b_0 > b_1 > \dots > b_n > \dots > \frac{1}{2}$$

を 1 つとる. $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots \in [0, 1]$ はすべて互いに異なることに注意しよう. 写像 $h: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ を

$$h(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & x = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_{n+1}, & x = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ x, & \text{その他}, \end{cases}$$

²⁾かなりトリッキーである. もっと素直な写像はないのかと問われれば, 閉区間 $[0, 1]$ から半开区間 $[0, 1)$ への連続な全単射は存在しないと答えておこう. このことは, 位相に関する初等的な議論でわかるが, ここでは立ち入らない.

で定義すると, 全単射になることが確かめられる (図 8.2).

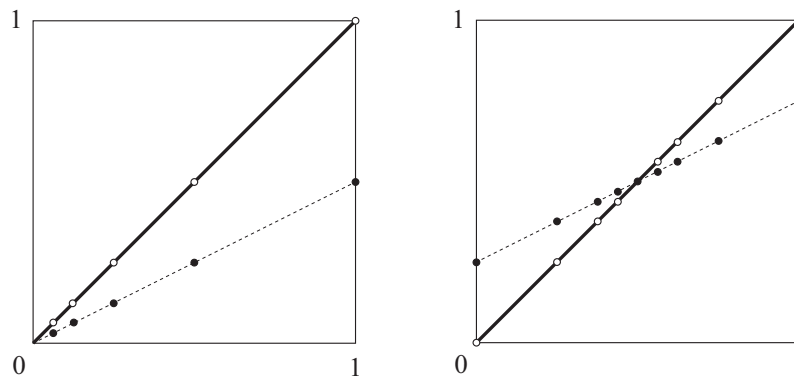


図 8.2: 全単射 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ と $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$

問 8.1 $(0, +\infty)$ と $\mathbb{R}$ は濃度が等しいことを, 具体的な全単射によって示せ.

問 8.2 $[0, +\infty)$ と $\mathbb{R}$ は濃度が等しいことを, 具体的な全単射によって示せ.

■ ヒルベルト・ホテル ヒルベルト³⁾は無数のもつ面白さや不思議さをやさしく解説しようとして, 満室のホテルの例を作った. ヒルベルト・ホテルと名付けられたホテルの客室は 1 号室から始まり, 2 号室, 3 号室, ... という具合にすべての自然数で番号付けられている. ある晩, このホテルはすでに満室だったが, そこに飛び入りの客が来て「空室はないか」と尋ねるのだった. 満室の札がかかっているのだから, もしやというわけであろう. しかし, レセプションで確認すると, 残念ながら, 満室に間違いはなかった. その客が諦めて帰りかけたとき, ホテルのオーナーが現れてホテル内にアナウンスを流した. 「皆さん, 隣の部屋に移ってください」と. 1 号室の客は 2 号室に, 2 号室の客は 3 号室に, ... という具合である. あたかもドミノ倒しが起こったように, 全員が無事に移動した後,

³⁾David Hilbert (1862–1943) ドイツの数学者. 1895 年にゲッティンゲン大学教授に就任し, 幅広い数学の分野で活躍し, 多くの著名な弟子を育てた. ドイツに留学した高木貞治 (1875–1960) もヒルベルトの弟子であった. 公理主義者として知られ, 1900 年のパリ国際数学会議で発表した「ヒルベルトの 23 の問題」は, 20 世紀の数学の方向性を示すものとして大きな影響を与えた. その第 1 問題こそ, カントルによって提起された連続体仮説であった.

1号室が空室となり、飛び入りの客に提供された。その後、3人連れがやって来て「満室の札は出ているだが、3室なんかならないか」と尋ねるのだった。もうお分かりですね。ヒルベルト・ホテルは、満室でも好きなだけ空室を用意できる魔法のホテルだったという話。

定理 8.3 の証明で用いた全単射 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ を思い出そう。すでに点がいっぱい詰まっている区間 $[0, 1)$ に、あぶれている元 1 を無理やり突っ込んで玉突きが起こったが、結果的にうまく収まっている。この様子がヒルベルトのホテルに似ていて面白い。

8.2 非可算集合

有限集合でもなく、可算集合でもない集合を非可算集合という。この節の目標は、実数の集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合であることを証明することである。そのためには、実数についての正確な理解が必要なので、その準備から始めよう。

■ 有限小数と無限小数 ここでは、実数を無限小数で表される数ととらえる。もう少し詳しく述べよう。まず、実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、それを超えない最大の整数を x の整数部分といい、

$$\lfloor x \rfloor = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$$

で表す。⁴⁾ たとえば、 $\lfloor 2 \rfloor = 2$ 、 $\lfloor \sqrt{30} \rfloor = 5$ 、 $\lfloor -3.45 \rfloor = -4$ となる。そうすると、すべての実数 x は、

$$x = \lfloor x \rfloor + y, \quad 0 \leq y < 1, \quad (8.4)$$

のように一意的に表される。したがって、実数の本質は区間 $[0, 1)$ に集約される。

あらためて、区間 $[0, 1]$ に属する実数を考えよう。任意の $x \in [0, 1]$ に対して、 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ を用いて、10進数による小数表示

$$x = 0.\xi_1\xi_2\xi_3\cdots \quad (8.5)$$

を考えることができる。⁵⁾ 実際、(8.5) は

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{10^k} \quad (8.6)$$

⁴⁾ フロア関数あるいはガウス記号とも呼ばれる。ガウス記号としては $[x]$ も使われる。

⁵⁾ ここでは実数の厳密な定義はせず、このような無限小数で表されるものを実数と考えておく。厳密な議論は第 16.3 節で扱う。

の略記と理解すべきである。ここで、ある桁から先がすべて 0 となる小数を有限小数、そうでないものを無限小数と呼ぶことにする。

有限小数は 2 通りに表示されることに注意しよう。たとえば、

$$0.235000\cdots = 0.234999\cdots \quad (8.7)$$

となる。実は、すべての実数 $x \in [0, 1]$ は高々 2 通りの小数で表され、2 通りの表示をもつものは 0 を除けば有限小数で表されるものに限られる (問 8.3)。

実数 $x \in [0, 1]$ の小数表示のために、無限数列の集合を導入すると便利である。まず、 $0, 1, \dots, 9$ からなる無限数列を

$$\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots), \quad \xi_k \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

のように書き、そのような無限数列 ω の全体を $\tilde{\Omega}$ とおく。⁶⁾ 各 $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して、無限級数

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{10^k}, \quad \omega = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots) \in \tilde{\Omega}, \quad (8.8)$$

は収束して、 $0 \leq \tilde{f}(\omega) \leq 1$ となる。通常、これを

$$\tilde{f}(\omega) = 0.\xi_1\xi_2\cdots\xi_k\cdots$$

のように小数表示する。こうして、写像 $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ が定義された。すべての実数は 10 進法で小数表示されるので、 $\tilde{f}$ は全射である。

無限数列 $\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \tilde{\Omega}$ で、ある番号から先の ξ_k がすべて 0 になっているものの全体を Ω_0 とおく。さらに、 $\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \Omega_0$ とおくと、

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \Omega_0, \quad \Omega \cap \Omega_0 = \emptyset$$

となる。定義によって、 $\omega \in \Omega_0$ に対して $\tilde{f}(\omega)$ は有限小数で表される実数となる。すでに述べたように、写像 $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ は全射であるが単射ではない。そこで、 $\tilde{f}$ の定義域を Ω に制限すると写像 $f: \Omega \rightarrow (0, 1]$ が得られる。

補題 8.5 $f: \Omega \rightarrow (0, 1]$ は全単射である。したがって、すべての $x \in (0, 1]$ は無限小数によって一意的に表される。

⁶⁾正式には、無限列は写像 $k \mapsto \xi_k$ として扱う。そうすると、 $\tilde{\Omega} = \text{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1, \dots, 9\})$ となる。

証明 まず, $f: \Omega \rightarrow (0, 1]$ は全射であることを示す. そのためには, 写像 $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ が全射であることから, $\omega \in \Omega_0$, $\omega \neq (0, 0, \dots)$, に対応する $\tilde{f}(\omega)$ に対して, $\omega' \in \Omega$ であって, $\tilde{f}(\omega) = f(\omega')$ となるものが存在することを示せばよい. 実際, $\omega \in \Omega_0$, $\omega \neq (0, 0, \dots)$, とすれば, ある $n \geq 1$ と $\xi_n \neq 0$ が存在して, $\omega = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ となる. このとき,

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi_k}{10^k} + \frac{\xi_n - 1}{10^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$

であるから, $\omega' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n - 1, 9, 9, \dots)$ とすれば, $\omega' \in \Omega$ であって, $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega')$ である (まさに, (8.7) で例示したとおり).

次に, 単射であることを示す. 異なる $\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots), \omega' = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in \Omega$ に対して, $f(\omega) = f(\omega')$ を仮定して矛盾を導けばよい. $\omega \neq \omega'$ から, ある $n \geq 1$ があって,

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} = \eta_{n-1}, \quad \xi_n < \eta_n$$

としてよい. このとき,

$$0 = f(\omega) - f(\omega') = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\xi_k - \eta_k}{10^k}$$

が成り立つから,

$$\frac{\eta_n - \xi_n}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\xi_k - \eta_k}{10^k} \quad (8.9)$$

が得られる. ここで, $\xi_n < \eta_n$ に注意すると,

$$\frac{1}{10^n} \leq \frac{\eta_n - \xi_n}{10^n} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{10^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^n} \quad (8.10)$$

となる. したがって, (8.10) に現れる不等号はすべて等号になり, $\eta_n = \xi_n + 1$ がわかる. そうすると,

$$\frac{\eta_n - \xi_n}{10^n} = \frac{1}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$

が得られる. これを (8.9) と比較すると, すべての $k \geq n+1$ に対して $\xi_k = 9$, $\eta_k = 0$ となり, $\omega' \in \Omega_0$ が得られる. これは初めの仮定 $\omega' \in \Omega$ に反する. ■

実数について整理できたので, いよいよ重要な定理を証明する.

定理 8.6 実数の集合 $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

証明 実数の集合 $\mathbb{R}$ が有限集合でないことは明らかなので, $\mathbb{R}$ が可算集合であると仮定して矛盾を導けばよい. まず, $\mathbb{R}$ の部分集合 $(0, 1]$ は無限集合であるから, 定理 7.8 によって可算集合である. そこで, $(0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$ のように, すべての $x \in (0, 1]$ に番号付けしておく. 補題 8.5 によれば, 各 x_n は 10 進法の無限小数で一意的に表されるので,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.\xi_{11}\xi_{12}\cdots\xi_{1n}\cdots \\ x_2 &= 0.\xi_{21}\xi_{22}\cdots\xi_{2n}\cdots \\ &\vdots \\ x_n &= 0.\xi_{n1}\xi_{n2}\cdots\xi_{nn}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように配列しておく. さて, $\beta_n \in \{1, 2\}$ を $\beta_n \neq \xi_{nn}$ となるように選んで無限小数

$$b = 0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$$

を考えよう. 明らかに $0 < b < 1$ であって, 無限小数表示の一意性から b は $x_1, x_2, \dots$ のいずれとも異なる. これは $(0, 1]$ の元を $\{x_1, x_2, \dots\}$ のように取り尽くしたことに矛盾する. ■

上の証明で用いた論法をカントルの対角線論法という.⁷⁾

問 8.3 すべての実数 $x \in (0, 1]$ は高々 2 通りの無限小数表示をもち, 2 通りの表示をもつものは有限小数で表される実数だけであることを示せ.

問 8.4 $0, 1, \dots, 9$ からなる無限列 $\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ で, ある番号から先はすべて 0 になるものの全体を Ω_0 とする. Ω_0 は可算集合であることを示せ.

■ **可算濃度と連続体濃度** 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同じ濃度をもつ集合が可算集合であった. 集合 A が可算集合であるとき, A は可算濃度をもつともいい,

$$|A| = \aleph_0$$

⁷⁾カントルの最初の証明では区間縮小法と呼ばれる異なる手法が用いられた [32](1874). 汎用性の高い対角線論法はそれよりずっと後に発表された [35](1891).

8.2. 非可算集合

123

と書く. 集合 A が実数の集合 $\mathbb{R}$ と同じ濃度をもつとき, A は連続体濃度 (または連続濃度) をもつといい,

$$|A| = \aleph$$

と書く.⁸⁾ 連続体濃度をもつ集合を一般に連続体という. カントルが得た最初の重要な知見は, 2つの濃度 $\aleph_0$ と $\aleph$ が異なることだった.

可算濃度に関して,

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$$

を示した. ただし, $\mathbb{A}$ は代数的数の全体である. また,

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^n| = \aleph_0$$

も成り立つ. 一方, 任意の実数 $a < b$ に対して,

$$|\mathbb{R}| = |(a, b)| = |(a, b]| = |[a, b)| = |[a, b]| = \aleph$$

を示した. さらに, $(-\infty, b)$ のように一方が無限に延びている区間の濃度も $\aleph$ である.

以下に, 連続体濃度をもつ集合の例を追加しておこう. まず, 便利な一般的な結果を準備する.

補題 8.7 集合 X, Y が

$$X = A \cup B, \quad Y = A_1 \cup C_1 \cup C_2$$

のように和集合で表され, 右辺はそれぞれ互いに素であるものとする. もし $|A| = |A_1|$, $|B| = |C_1| = |C_2| = \aleph_0$ であれば, $|X| = |Y|$ である.

証明 仮定から, 4つの全単射

$$f: A \longrightarrow A_1, \quad g: \mathbb{N} \longrightarrow B, \quad h_1: \mathbb{N} \longrightarrow C_1, \quad h_2: \mathbb{N} \longrightarrow C_2,$$

が存在する. ここで, 写像 $\varphi: Y \longrightarrow X$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1, \\ g(2h_1^{-1}(x) - 1), & x \in C_1, \\ g(2h_2^{-1}(x)), & x \in C_2, \end{cases}$$

⁸⁾ $\aleph$ (アレフ) はヘブライ語のアルファベットの先頭文字である. 連続体濃度を $\mathfrak{c}$ (ツェー) で表す流儀もある. $\mathfrak{c}$ は continuum (これは英語) の頭文字をドイツ文字表記したもの.

で定義すると, 全単射になることが容易にわかる. ■

定理 8.8 $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph$. すなわち, 無理数の全体は連続体濃度をもつ.

証明 無理数の全体を $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とおき, 集合 B を $B = \{n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ で定義する. $B \subset X$ に注意して, $A = X \setminus B$ とおくと,

$$X = A \cup B, \quad \mathbb{R} = A \cup B \cup \mathbb{Q}$$

となり, 右辺はそれぞれ互いに素な和集合であり, さらに $|B| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ である. ここで, 補題 8.7 を適用すれば, $|X| = |\mathbb{R}| = \aleph$ がわかる. ■

定理 8.9 $|\text{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\})| = \aleph$. すなわち, $0, 1$ からなる無限数列の全体は連続体濃度をもつ.

証明 簡単のため,

$$\tilde{\Omega} = \text{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) = \{\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_n \in \{0, 1\}\}$$

とおく. 各 $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して無限級数

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}, \quad \omega = (\xi_1, \xi_2, \dots),$$

を考えれば, 写像 $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ が得られる. これは実数 $x \in [0, 1]$ の 2 進小数表示に他ならない. 10 進小数表示の場合と同様に, Ω_0 をある番号から先は 0 だけが続く無限数列 $\omega \in \tilde{\Omega}$ の集合として, $\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \Omega_0$ とおく. 10 進小数表示と同様な議論で, 有限小数だけ 2 通りの表示ができることが示される. そこで, $\tilde{f}$ の定義域を Ω に制限することで写像 $f : \Omega \rightarrow (0, 1]$ が全単射になることがわかる. したがって,

$$|\Omega| = |(0, 1]| = \aleph \tag{8.11}$$

が成り立つ. また, $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ は可算集合であるから, $\Omega_1 = f^{-1}((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ も可算集合である. $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ とおけば,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \tilde{\Omega} = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

が成り立ち, 右辺はそれぞれ互いに素な集合の和集合になる. ここで, $|\Omega_0| = |\Omega_1| = \aleph_0$ であるから, 補題 8.7 と (8.11) から $|\tilde{\Omega}| = |\Omega| = \aleph$ が得られる. ■

8.2. 非可算集合

125

補題 8.10 任意の集合 X に対して次が成り立つ.

$$|2^X| = |\text{Map}(X, \{0, 1\})|.$$

証明 補題 6.26 によって, X の部分集合 A に対して定義関数 χ_A を対応させることで, 全単射 $2^X \rightarrow \text{Map}(X, \{0, 1\})$ が得られる. ■

定理 8.11 $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph$. すなわち, $\mathbb{N}$ の部分集合の全体は連続体濃度をもつ.

証明 定理 8.9 と補題 8.10 から, $|2^{\mathbb{N}}| = |\text{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\})| = \aleph$ となる. ■

問 8.5 集合 A, B が $|A| = |B|$ を満たせば, $|2^A| = |2^B|$ であることを示せ. 次に, 任意の可算集合 A に対して $|2^A| = \aleph$ であることを示せ.

■ **代数的数と超越数** 超越数が存在すること, しかも任意の開区間内に無数に存在することを初めて証明したのはリウヴィル⁹⁾であった(1844). その後, 与えられた実数が代数的数か超越数であるかを判定する問題が注目され, たとえば, 円周率 π や自然対数の底 e が超越数であることが相次いで証明された.¹⁰⁾ 代数的数か超越数かを判定する問題は相当に困難であって, たとえば, $\pi + e$ は超越数だろうと予想されるが今もって未解決である(それどころか, 無理数かどうかもわかっていない). カントルは, 自ら考案した濃度というアイデアを用いて, 代数的数の集合が可算集合であること(定理 7.23)と実数の集合が非可算集合であること(定理 8.6)を証明した(1874). したがって, その簡単な帰結として, 実数の圧倒的大多数は超越数であることを導いた. カントルの議論は, 与えられた数が代数的数か超越数かを個別的に判定する助けにはならないが, 超越数の深淵の一端を鮮やかに切って見せたという点で画期的であった.

■ **連続体仮説** これまでの議論から, 実数の部分集合には有限集合, 自然数と濃度が同じもの(可算集合), 実数と濃度が同じもの(連続体濃度の集合)が存在することがわかった. そうすると, 実数の無限部分集合で, 自然数とも実数とも濃

⁹⁾ Joseph Liouville (1809–1882) フランスの数学者. 代数的数を有理数で近似する研究の中でリウヴィルの定理を証明して, 初めて超越数の具体例(リウヴィル数)を与えた. 古典力学や複素解析の分野にもリウヴィルの定理と称される有名な成果をあげた.

¹⁰⁾ e が超越数であることは, エルミート(Charles Hermite, 1822–1901. フランスの数学者)によって証明された(1873). π が超越数であることは, リンデマン(Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939. ドイツの数学者)が証明した(1882). 実際, リンデマンはより一般の定理を証明して, その帰結として π だけではなく e も超越数であることを示した.

度が異なるものが存在するかという疑問が生じる。カントルは「可算濃度より真に大きく、連続体濃度より真に小さい濃度をもつ集合は存在しない」と予想した(1878)。この予想を連続体仮説という。カントル自身は、存命中に成果を得ることはなかった。

実際、連続体仮説の解決には、集合論が公理化されてからも長い年月を要し、しかもそれは予期せぬ形で決着した。1940年にゲーデルは「ZFC公理系に連続体仮説を加えても矛盾が生じない」ことを示し、1963年にコーエン¹¹⁾は強制法と呼ばれる独創的な手法を導入して、「ZFC公理系に連続体仮説の否定を加えても矛盾が生じない」ことを示して衝撃を与えた。集合論において標準的とされるZFC公理系ではあるが、その公理系において、連続体仮説の肯定も否定も証明できないのである。このことを連続体仮説のZFC公理系からの独立性という。ただし、これらの結果はZF公理系が無矛盾であることを前提としている。ZF公理系が矛盾を含まないことは確かだと信じられているが、そのこと自体はZF公理系の枠内では証明不可能であることも知られている。

¹¹⁾Paul Joseph Cohen (1934–2007) アメリカ合衆国の数学者。1963年の有名な論文で、ZF公理系と選択公理の独立性、ZFC公理系と連続体仮説の独立性、およびZFC公理系と一般連続体仮説の独立性を証明した。これらの業績によってフィールズ賞を受賞した(1966)。