第9章　濃度の比較

9.1　濃度の比較

集合 A から B への単射が存在するとき,

$$|A| \leq |B|$$

と書いて, A は B より濃度が大きくない, あるいは B は A より濃度が小さくないという. 集合 A から B への単射が存在するが, 全単射は存在しないときは,

$$|A| < |B|$$

と書いて, A は B より濃度が (真に) 小さい, あるいは B は A より濃度が (真に) 大きいという. 定義によって, $|A| \leq |B|$ は, $|A| < |B|$ または $|A| = |B|$ を意味する. もちろん, $|A| < |B|$ と $|A| = |B|$ は両立しない.

定 理 9.1 (部分集合) 集合 A, B について, 次が成り立つ.

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad |A| \leq |B|.$$

証 明　包含写像 $i : A \longrightarrow B$ は単射であるから明らか. ∎

例 9.2 数の集合については $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ であり, 次が成り立つ.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|.$$

補 題 9.3 集合 A, A_1, B, B_1 について次が成り立つ.

$$|A| \leq |B|, \ \ |A_1| = |A|, \ \ |B_1| = |B| \quad \Rightarrow \quad |A_1| \leq |B_1|.$$

証 明　仮定によって, 単射 $f : A \longrightarrow B$, 全単射 $g : A_1 \longrightarrow A$, 全単射 $h : B_1 \longrightarrow B$ が存在する. このとき, 合成写像 $h^{-1} \circ f \circ g : A_1 \longrightarrow B_1$ は単射である. したがって, $|A_1| \leq |B_1|$ が成り立つ. ∎

補 題 9.4 (濃度の推移性)　集合 A, B, C について, 次が成り立つ.

$$|A| \leq |B|, \quad |B| \leq |C| \quad \Rightarrow \quad |A| \leq |C|.$$

証 明　仮定から 2 つの単射 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ が存在する. このとき, 合成写像 $g \circ f : A \longrightarrow C$ も単射になるから, $|A| \leq |C|$ が成り立つ. ∎

補題 9.3 と補題 9.4 は明らかで, 何をことさら証明しているのかと訝るかも知れない. 重要なことは, $|A| = |B|$ と $|A| \leq |B|$ は 2 つの集合 A, B の関係を定義しているに過ぎず, $|A|, |B|$ を単独の量としては与えていないことにある. しかしながら, 上の主張は $|A|, |B|, \ldots$ が数のように振舞うことを示唆している. 本章から次章にかけて, この観点を発展させる.

■ **べき集合**　いくらでも濃度の大きな集合が存在することを示そう. 一般に, 集合 A の部分集合の全体を 2^A と書いて**べき集合**と呼ぶのだった.

補 題 9.5　集合 A に対して, べき集合 2^A から A への単射は存在しない.

証 明　背理法による. 単射 $f : 2^A \longrightarrow A$ が存在したと仮定する. A の部分集合 $Y = \{f(X) \mid X \in 2^A, f(X) \notin X\}$ を考えて, $a = f(Y)$ とおく. $a \in A$ であるから, Y に属すか属さないかのいずれかである. まず, $a \notin Y$ とすると, Y の定義によって $f(Y) \in Y$ である. これは $a \in Y$ を導くので矛盾. 一方, $a \in Y$ とすると, Y の定義から, $X \in 2^A$ で $f(X) \notin X$ かつ $f(X) = a$ となるものが存在する. そうすると, $f(X) = f(Y)$ となるが, f は単射なので $X = Y$ である. したがって, $a = f(Y)$, $a \in Y$ となる. そうすると, Y の定義から $a \notin Y$ が得られて, やはり矛盾である. したがって, 単射 $f : 2^A \longrightarrow A$ は存在しない. ∎

定 理 9.6　すべての集合 A について, $|A| < |2^A|$ が成り立つ.

証 明　まず, $x \in A$ に対して, それのみからなる集合 $\{x\}$ を対応させれば, $x \mapsto \{x\}$ は A から 2^A への単射である. もし, A から 2^A への全単射が存在すれば, その逆写像が 2^A から A への全単射となり, 補題 9.5 に矛盾する. した

がって, A から 2^A への全単射は存在しない. 要するに, A から 2^A への単射は存在するが, 全単射は存在しない. したがって, $|A| < |2^A|$ が成り立つ. ∎

例 9.7 A が有限集合で $|A| = n$ であれば, $|2^A| = 2^n$ である. したがって, 定理 9.6 の言う $|A| < |2^A|$ は $n < 2^n$ を意味する. 確かに, すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $n < 2^n$ が成り立っている.

例 9.8 可算集合 A に対して, $|2^A|$ は連続体濃度をもつ (定理 8.11). したがって, 定理 9.6 の言う $|A| < |2^A|$ は可算濃度が真に連続体濃度よりも小さいこと, すなわち $\aleph_0 < \aleph$ を意味する. 定理 8.6 において示した通りである.

9.2 カントル-ベルンシュタインの比較定理

定 理 9.9 (カントル-ベルンシュタインの比較定理)[1] 2 つの集合 A, B に対して, A から B への単射と B から A への単射が存在すれば, A と B の濃度は等しい. すなわち,

$$|A| \leq |B|, \ \ |B| \leq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|$$

が成り立つ.

証 明 仮定から 2 つの単射 $f : A \longrightarrow B$ と $g : B \longrightarrow A$ が存在する. 簡単のため, $A_1 = g(B)$, $A_2 = g \circ f(A)$ とおく. 明らかな包含関係 $f(A) \subset B$ から $g(f(A)) \subset g(B)$ であるから,

$$A_2 \subset A_1 \subset A \tag{9.1}$$

が成り立つ. 一方, 合成写像 $g \circ f : A \longrightarrow A$ は単射だから,

$$|A_2| = |A| \tag{9.2}$$

[1] この名称の正統性については諸説ある. カントルはこの定理を証明なしで発表した (1887). デデキントも同年に証明するが発表しなかった. カントルは濃度の比較可能性を証明せずに述べて, その帰結としてこの定理を主張した (1895). シュレーダー (Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, 1841–1902, ドイツの数学者) は証明の概要を発表するが (1896), それは誤りであった (1911). カントルのセミナーに出席していた当時学生だったベルンシュタイン (Felix Bernstein, 1878–1956. ドイツの数学者) が証明し (1897), 学位論文で発表した (1898). ベルンシュタインの訪問後にデデキントは 2 つ目の証明を見つけた (1897).

である. 同様に, g も単射だから $|A_1| = |B|$ である. ここで, (9.1) と (9.2) から $|A_1| = |A|$ を示すことができれば, $|A_1| = |B|$ と合わせて $|A| = |B|$ が得られて証明が終わる. 残された部分は, 定理 9.10 として切り分けよう. ∎

定 理 9.10 3 つの集合 A, A_1, A_2 について, 次が成り立つ.

$$A_2 \subset A_1 \subset A,\ |A_2| = |A| \quad \Rightarrow \quad |A_1| = |A|.$$

証 明　まず, $A_2 \subset A_1 \subset A$ をもとに,

$$C_0 = A \backslash A_1\,, \qquad D_0 = A_1 \backslash A_2\,, \qquad E_0 = A_2$$

とおくと, C_0, D_0, E_0 は互いに素で,

$$A = C_0 \cup D_0 \cup E_0 \tag{9.3}$$

が成り立つ. また, $|A_2| = |A|$ から全単射 $f : A \longrightarrow A_2$ が存在する. (9.3) の f による像について,

$$E_0 = A_2 = f(A) = f(C_0) \cup f(D_0) \cup f(E_0)$$

が成り立ち, $f(C_0), f(D_0), f(E_0)$ は互いに素である. ここで,

$$C_1 = f(C_0), \qquad D_1 = f(D_0), \qquad E_1 = f(E_0)$$

とおく (図 9.1). そうすると,

$$E_0 = C_1 \cup D_1 \cup E_1\,, \qquad E_1 \subset E_0, \tag{9.4}$$

が成り立つ.

次に,

$$C_2 = f(C_1), \qquad D_2 = f(D_1), \qquad E_2 = f(E_1)$$

とおいて, (9.4) の f による像を考えると,

$$E_1 = f(E_0) = f(C_1) \cup f(D_1) \cup f(E_1) = C_2 \cup D_2 \cup E_2\,, \qquad E_2 \subset E_1$$

がわかる. これを繰り返す. 簡単のため, $n \geq 1$ に対して,

$$C_n = f(C_{n-1}), \qquad D_n = f(D_{n-1}), \qquad E_n = f(E_{n-1}),$$

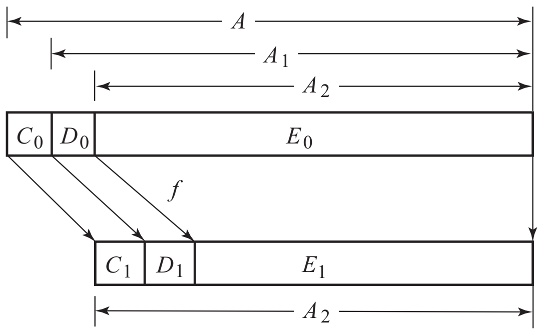

図 9.1: $E_0 = A_2 = f(A) = f(C_0) \cup f(D_0) \cup f(E_0)$

とおくと,

$$E_{n-1} = C_n \cup D_n \cup E_n\,, \qquad E_n \subset E_{n-1}\,, \qquad n \geq 1,$$

が成り立つ. 特に,

$$A \supset A_1 \supset A_2 = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$$

となっている. ここで,

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

とおくと,

$$A = F \cup (A \backslash E_0) \cup (E_0 \backslash E_1) \cup (E_1 \backslash E_2) \cup \cdots\,,$$
$$A_1 = F \cup (A_1 \backslash E_0) \cup (E_0 \backslash E_1) \cup (E_1 \backslash E_2) \cup \cdots$$

が得られる. 一方,

$$A \backslash E_0 = C_0 \cup D_0, \qquad A_1 \backslash E_0 = D_0,$$
$$E_0 \backslash E_1 = C_1 \cup D_1, \qquad E_1 \backslash E_2 = C_2 \cup D_2,\ \ldots$$

であるから,

$$A = F \cup (C_0 \cup D_0) \cup (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2) \cup \cdots\,,$$

$$A_1 = F \cup D_0 \cup (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2) \cup \cdots ,$$

がわかる (図 9.2). 右辺において, 和集合の順序を入れ替えれば,

$$A = (F \cup D_0 \cup D_1 \cup \cdots) \cup (C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots),$$
$$A_1 = (F \cup D_0 \cup D_1 \cup \cdots) \cup (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots),$$

となる. これをもとに, 写像 $g : A \longrightarrow A_1$ を

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in F \cup D_0 \cup D_1 \cup \cdots , \\ f(x), & x \in C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots , \end{cases}$$

で定義する. f が C_{n-1} から C_n の上への全単射を与えることから, $g : A \longrightarrow A_1$ は全単射であることがわかる. したがって, $|A_1| = |A|$ である. ■

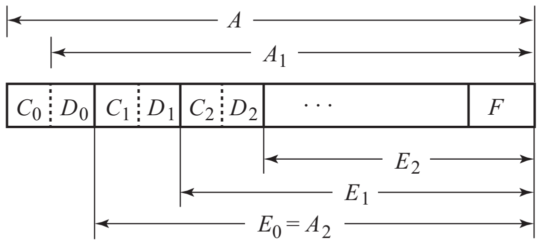

図 9.2: $A = F \cup (C_0 \cup D_0) \cup (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2) \cup \cdots$

例 9.11 開区間 $(0,1)$ と閉区間 $[0,1]$ の濃度は等しい. 定理 8.4 では, いささかトリッキーではあるが, 全単射を実際に構成した. 具体的な全単射が必要なければ, カントル-ベルンシュタインの比較定理 9.9 によって $|(0,1)| = |[0,1]|$ が簡単に示される. たとえば, $f(x) = (x+1)/3$ で定義される写像 $f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$ は単射である. また, 包含写像 $i : (0,1) \longrightarrow [0,1]$ も単射である. このように双方向の単射が存在するから, $|(0,1)| = |[0,1]|$ となる.

例 9.12 $(0,1]$ と $(0,1] \times (0,1]$ の濃度は等しい. $f : (0,1] \longrightarrow (0,1] \times (0,1]$ を $f(x) = (x, 1/2)$ で定義すれば, これは明らかに単射である. 逆向きの単射を構

成しよう．第 8.2 節で議論した実数の無限小数表示を思い出すと, $x, y \in (0,1]$ に対して, $(\xi_1, \xi_2, \ldots), (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in \Omega$ が一意的に定まって,

$$x = 0.\xi_1\xi_2\cdots, \qquad y = 0.\eta_1\eta_2\cdots$$

と書ける (補題 8.5)．これを用いて, 写像 $g : (0,1] \times (0,1] \longrightarrow (0,1]$ を

$$g(x,y) = 0.\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2\cdots \tag{9.5}$$

で定義する．右辺に対応する $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots)$ は確かに Ω の元であるから, $g(x,y) \in (0,1]$ となる．さらに, (9.5) の右辺から x, y を一意的に再現できるので, g は単射である．[2] 双方向の単射が構成できたので, カントル-ベルンシュタインの比較定理 9.9 を適用して $|(0,1]| = |(0,1] \times (0,1]|$ がわかる．

第 7.1 節で議論したように, $|(0,1]| = |\mathbb{R}|$ は既知である．したがって,

$$|(0,1] \times (0,1]| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$$

が得られる (補題 7.16)．一方, 例 9.12 で示したように,

$$|(0,1]| = |(0,1] \times (0,1]|$$

であるから,

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \tag{9.6}$$

がわかる．これに直積を繰り返して適用すれば, 次の定理が得られる．

定 理 9.13 任意の自然数 n に対して,

$$|\mathbb{R}| = |\overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n}| = |\mathbb{R}^n|.$$

証 明 補題 7.16 を (9.6) に繰り返し適用すればよい． ∎

定理 9.13 は衝撃的ではないだろうか．まず, 数直線として考えることで, 直線上の点と実数が 1 対 1 対応するので, 点の集合として直線と $\mathbb{R}$ の濃度は等しい．

[2] g は全射ではない．たとえば, $g(x,y) = 0.202020\cdots$ を満たす $x, y \in (0,1]$ は存在しない．ただし, (9.5) の定義を少し修正すれば, 全単射 $(0,1] \times (0,1] \longrightarrow (0,1]$ を構成することができる．たとえば, 松村 [3] を見よ．

TAIKEI-BOOK : 2019/1/1(22:21)

次に, xy-座標を考えれば, 平面の点と実数の順序対 (x, y) が 1 対 1 対応するので, 点の集合として平面と直積集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の濃度は等しい. そうすると, (9.6) から, 点の集合として「直線と平面の濃度は等しい」という結論に至る.

直線は平面の中で, 実にわずかな部分しか占めていない. しかし, 直線を構成している点をバラバラにして並べ替えれば, 平面を埋め尽くすのである. だからと言って, 直線をぐるぐると引き回して平面が埋め尽くされるという見方は, もちろん正しくない.[3)]

問 9.1 2 つの集合 A, B について, $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, $|A| > |B|$ のどの 2 つも両立しないことを示せ.

問 9.2 3 つの集合 A, B, C について, 次を示せ.

(1) $|A| \leq |B|,\ |B| < |C| \Rightarrow |A| < |C|$.

(2) $|A| < |B|,\ |B| \leq |C| \Rightarrow |A| < |C|$.

問 9.3 xy-座標平面 $\mathbb{R}^2$ の開円板 $A = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ と閉円板 $B = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ の濃度は等しいことを示せ.

問 9.4 (1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \{y \in \mathbb{Q} \,|\, y \leq x\}$ とおくと, 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{Q}}$ は単射であることを示せ.

(2) 任意の $A \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して

$$g(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{10^n}\,, \quad A \neq \emptyset, \qquad g(\emptyset) = 0,$$

とおくと, 写像 $g : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射であることを示せ.

(3) (1),(2) を用いて, $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ を示せ.

■ **カントルのパラドックス** すべての集合を集めたものを集合 Ω と考えると矛盾が生じることはすでに述べた. べき集合を用いた議論からカントル自身もそ

[3)]カントルは 1878 年の論文 [33] で $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ を証明した. 実は, 次元に関する考察から $|\mathbb{R}| < |\mathbb{R}^2|$ を予想して, 3 年に及ぶ格闘の末, その予想は裏切られたのだった. デデキントとの往復書簡の中で「我見るも, 我信ぜず」と記している. 集合の濃度という概念が, 幾何学的な実体からかけ離れていて, カントルでさえ直感が及ばなかったのだろうか. 確かに, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$ を根拠に, 1cm の線分の点を並べ替えて地球を作ることができる (もちろん, 物理的には不可能だが) と言われても, どう直感と折り合いをつけたらよいのだろうか.

のことには気付いていた．まず, 2^Ω の元はすべて集合であるから, 2^Ω は Ω の部分集合である．したがって, $|2^\Omega| \leq |\Omega|$ が成り立つ (定理 9.1)．一方, Ω のべき集合 2^Ω に対しては $|\Omega| < |2^\Omega|$ が成り立つ (定理 9.6), こうして, あっさりと矛盾に陥る．カントルはこのようなパラドックスは集合論を発展させていく上でプラスになるものと考え, あまり問題視していなかったという．