

第12章 順序集合

本章では, 最も基本的な2項関係の1つである順序関係を導入する. 実数の大小や集合の包含関係が順序関係の典型例であり, 集合の元同士の比較や集合の元の配列を考えるとなくてはならない概念である.

12.1 順序関係と順序集合

集合 A 上の2項関係 \preceq が次の3性質(順序の公理という)を満たすとき, A 上の順序関係または単に順序という.

- (i) [反射律] $x \preceq x$.
- (ii) [反対称律] $x \preceq y, y \preceq x \Rightarrow x = y$.
- (iii) [推移律] $x \preceq y, y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

記法の便利さのために $x \preceq y$ を $y \succeq x$ とも書く.

さらに, 等号なしの順序関係 \prec を導入しておくくと便利である. A 上の2項関係 \prec を

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y, \quad x \neq y$$

で定義する. このとき, 次の性質は容易にわかる.

- (i') $x \prec y$ と $y \prec x$ は両立しない.
- (ii') [推移律] $x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

逆に, (i'), (ii') を満たす2項関係 \prec が与えられたとき, あらためて A 上の2項関係 \preceq を

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \prec y \quad \text{または} \quad x = y$$

で定義すれば, \preceq は A 上の順序になる.

■ **順序集合** 順序関係 \preceq または等号なしの順序関係 \prec が与えられている集合 A を順序集合といい, (A, \preceq) または (A, \prec) のように表す. すぐ後に導入する全

順序集合と明確に区別したければ、半順序集合という。順序関係があらかじめ明らかなきは、集合の記号 A だけですますことも多い。集合は共通でも、異なる順序が与えられていれば、順序集合としては異なるものとして扱う。

■ **全順序集合** 順序集合 (A, \preceq) の 2 元 $x, y \in X$ は、 $x \preceq y$ または $y \preceq x$ を満たすとき比較可能であるという。もし任意の 2 元が比較可能、つまり、

(iv) 任意の $x, y \in X$ は $x \preceq y$ または $y \preceq x$ を満たす

とき、 (A, \preceq) を全順序集合または線形順序集合という。条件 (iv) を等号なしの順序関係 \prec で述べれば次のようになる。

補題 12.1 順序集合 (A, \prec) が全順序集合であるための必要十分条件は、任意の $x, y \in X$ について、

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x$$

のいずれか 1 つだけが成り立つことである。

■ **部分順序集合** (A, \preceq) が順序集合であれば、部分集合 $B \subset A$ は自然に順序集合になる。¹⁾ つまり、 $x, y \in B$ に対して、 A に備わっている順序 \preceq を適用すれば、 B 上の順序になることは明らかである。これを (B, \preceq) と書いて A の部分順序集合という。 A が全順序集合なら B もそうである。もちろん、 A が全順序でない順序集合であっても、部分順序集合 B は全順序集合になりうる。

例 12.2 (実数の大小) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、通常的大小 $x \leq y$ は \mathbb{R} 上に全順序を定める。実際、 \leq が全順序の条件 (i)–(iv) を満たすことは明らかだろう。そうすると、 (\mathbb{R}, \leq) は全順序集合になる。 \mathbb{R} の部分集合である $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ は (\mathbb{R}, \leq) の部分順序集合であり、それ自身が全順序集合である。これらの数の集合に対しては、特に断りのない限り、通常の数 \leq を考えるものとする。

例 12.3 (自然数の整除関係) 自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ に対して、 y が x で割り切れる (あるいは、 x が y を割り切る) とき、 $x|y$ と記す。2 項関係 $|$ が順序の公理 (i)–(iii) を満たすことは容易にわかり、 $(\mathbb{N}, |)$ は順序集合になる。これは全順序集合ではない。たとえば、3 と 5 は比較不能である。

¹⁾ 空集合 \emptyset 上にはただ 1 つの 2 項関係が存在する ($\emptyset \times \emptyset$ の部分集合は 1 つしかないから)。それが全順序の公理を満たすのは自明な論理である。この意味で、空集合も順序集合として扱う。

例 12.4 (集合の包含関係) 集合 X を 1 つ固定して, そのべき集合を 2^X とする. このとき, $A, B \in 2^X$ に対して定義される包含関係 $A \subset B$ は, べき集合 2^X 上の順序関係を定めて, $(2^X, \subset)$ は順序集合になる. 包含関係に関する基本法則 (定理 2.3) が順序の公理 (i)–(iii) に他ならない. 自明な場合 ($|X| \leq 1$) を除いて, $(2^X, \subset)$ は全順序集合ではない.

■ **ハッセ図** 順序集合 (A, \preceq) を直感的にとらえるのにハッセ図が役に立つ. この図は, A の元に点を対応させて, $x \prec y$ が成り立つが, $x \prec z$ かつ $z \prec y$ となる z が存在しないとき (このとき, y を x の後続元という), x を y の左方に配置して, 線分で結んだものである.

例 12.5 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$ に整除関係 $x|y$ を与えた順序集合 $(A, |)$ のハッセ図を図 12.1(左) に示した. たとえば, $1, 2 \in A$ については $1|2$ が成り立ち, $1|z$ かつ $z|2$ となる途中の z は存在しないので, 2 は 1 の後続元となり, 線分で結ばれる. $1, 4$ については $1|4$ が成り立つが, $1|z$ かつ $z|4$ となる途中の z として $z = 2$ が存在するから, 1 と 4 は線分で結ばれない.

例 12.6 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ のべき集合

$$A = 2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

に包含関係を与えた順序集合 (A, \subset) のハッセ図を図 12.1(右) に示した.

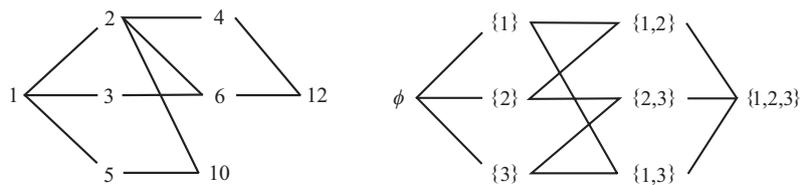


図 12.1: ハッセ図 : 例 12.5 $(A, |)$ と例 12.6 (A, \subset)

■ **最大元と最小元** (A, \preceq) を順序集合として, A は空でないものとする. $a \in A$ が A の最大元であるとは, すべての $x \in A$ に対して $x \preceq a$ が成り立つことを

いう。最大元は存在するとは限らないが、存在すれば一意であり、 $\max A$ で表す。同様に、 $a \in A$ が A の最小元であるとは、すべての $x \in A$ に対して $a \preceq x$ が成り立つことをいう。最小元は存在するとは限らないが、存在すれば一意であり、 $\min A$ で表す。

■ 極大元と極小元 (A, \preceq) を順序集合として、 A は空でないものとする。 $a \in A$ が A の極大元であるとは、 $a \prec x$ を満たす $x \in A$ が存在しないときにいう。同様に、 $a \in A$ が A の極小元であるとは、 $x \prec a$ を満たす $x \in A$ が存在しないときにいう。極大元や極小元は存在するとは限らず、また存在してもその個数については何も言えない。

例 12.7 例 12.5 において、最小元は $\min A = 1$ であるが、最大元 $\max A$ は存在しない。また、1 は極小元でもあり、10 と 12 は極大元である。例 12.6 において、最小元は $\min A = \emptyset$ 、最大元は $\max A = \{1, 2, 3\}$ である。また、 \emptyset は極小元でもあり、 $\{1, 2, 3\}$ は極大元でもある。

例 12.8 (\mathbb{N}, \leq) には最大元も極大元も存在しない。一方、最小元 1 が存在し、それは極小元でもあり、他に極小元はない。

例 12.9 自然数から 1 を除いた集合 $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に整除関係を与えた順序集合 $(A, |)$ には最大元、極大元、最小元は存在しない。一方、すべての素数が極小元になるので極小元は無数に存在する。

■ 上界と下界・上限と下限 (X, \preceq) を順序集合、 A を空でない部分集合とする。このとき、部分順序集合 (A, \preceq) の最大元、最小元、極大元、極小元をもって、 A の最大元、最小元、極大元、極小元と定義する。したがって、それらは A に属する元として定まる。この点を弱めて、 A と X の関係性を考慮したものとして上限と下限が導入される。

すべての $a \in A$ に対して $a \preceq x$ となる $x \in X$ を A の上界という。 A の上界の全体を

$$U(A) = \{x \in X \mid \text{すべて } a \in A \text{ に対して } a \preceq x\}$$

とする。 $U(A)$ が空ではなく、 $\min U(A)$ が存在するとき、これを A の上限といひ $\sup A$ と書く。同様に、すべての $a \in A$ に対して $x \preceq a$ となる $x \in X$ を A

12.1. 順序関係と順序集合

の下界という. A の下界の全体

$$L(A) = \{x \in X \mid \text{すべて } a \in A \text{ に対して } x \preceq a\}$$

が空ではなく, $\max L(A)$ が存在するとき, これを A の下限といい $\inf A$ と書く.

例 12.10 例 12.5 において, 部分集合 $B = \{2, 4, 6\}$ を考えると,

$$U(B) = \{12\}, \quad L(B) = \{1, 2\}$$

である. したがって, $\max B$ は存在せず, 上限は $\sup B = 12$ となる. また, $\min B = \inf B = 2$ である.

例 12.11 例 12.6 において, 部分集合 $B = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ を考えると,

$$U(B) = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}, \quad L(B) = \{\emptyset\}$$

である. したがって, $\max B = \sup B = \{1, 2\}$ となる. 一方, $\min B$ は存在せず, 下限は $\inf B = \emptyset$ となる.

問 12.1 (A, \preceq) を空でない順序集合とする. $a \in A$ が A の最大元であれば, それは極大元でもあり, 他に極大元はないことを示せ. また, $a \in A$ が A の最小元であれば, それは極小元でもあり, 他に極小元はないことを示せ.

問 12.2 全順序集合においては, 最大元と極大元が一致することを示せ. また, 最小元と極小元が一致することを示せ.

問 12.3 順序集合 $(\mathbb{N}, |)$ の部分集合 $A = \{6, 10, 12, 18, 36, 60\}$ の最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上限, 下限を求めよ.

問 12.4 \mathbb{Q} を通常の大小によって順序集合とみなす. 次の部分集合 A, B の最大元, 最小元, 上限, 下限を求めよ.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}, \quad B = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

12.2 順序同型

(X, \preceq_X) と (Y, \preceq_Y) を順序集合とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ は,

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \preceq_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \preceq_Y f(x_2)$$

を満たすとき, 順序を保つまたは単調な写像という. もし, $f: X \rightarrow Y$ が全単射で, f, f^{-1} ともに順序を保つならば, f を順序同型写像という. 順序集合 X, Y の間に順序同型写像が存在するとき, X と Y は順序同型であるという.

例 12.12 $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{Z}$ とする. $f(x) = 2x - 5$ で定義された写像 $f: X \rightarrow Y$ は順序を保つ.

例 12.13 $X = Y = \mathbb{Z}$ とする. $f(x) = x + 1$ で定義された写像 $f: X \rightarrow Y$ は順序同型写像である.

例 12.14 $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$ として, X には包含関係による順序, Y には通常的大小関係による順序を考える. 写像 $f: X \rightarrow Y$ を

$$f: \emptyset \mapsto 1, \quad f: \{1\} \mapsto 2, \quad f: \{2\} \mapsto 3, \quad f: \{1, 2\} \mapsto 4,$$

で与える. このとき, $f: X \rightarrow Y$ は順序を保つ全単射であるが, $f^{-1}: Y \rightarrow X$ は順序を保たない.

定理 12.15 X, Y を全順序集合とする. 全単射 $f: X \rightarrow Y$ が順序を保てば, $f^{-1}: Y \rightarrow X$ も順序を保つ.

証明 X, Y の順序をそれぞれ \preceq_X, \preceq_Y とする. $y_1, y_2 \in Y$ が $y_1 \preceq_Y y_2$ を満たすものとする. f は全単射であるから, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ を満たす $x_1, x_2 \in X$ が一意に存在し, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ と $x_2 = f^{-1}(y_2)$ となる. X は全順序集合であるから,

(i) $x_1 \preceq_X x_2$, または (ii) $x_2 \preceq_X x_1$

が成り立つ. もし (ii) であれば, f が順序を保つことから $f(x_2) \preceq_Y f(x_1)$ となり, $y_2 \preceq_Y y_1$ が成り立つ. しかし, もとより $y_1 \preceq_Y y_2$ であるから, $y_1 = y_2$ となり, $x_1 = x_2$ が得られる. そうすると, (i), (ii) のいずれにせよ, $x_1 \preceq_X x_2$ であり, $f^{-1}(y_1) \preceq_X f^{-1}(y_2)$ が成り立つ. ■

定理 12.16 X, Y を順序集合, $f: X \rightarrow Y$ を順序同型写像とする. X の空でない部分集合 A に対して, $a \in A$ が A の最大元 (または最小元, 極大元, 極小元) であれば, $f(a)$ は $f(A)$ の最大元 (または最小元, 極大元, 極小元) である.

証明 任意の $y \in f(A)$ を考える. まず, $f^{-1}(y) \in A$ と $a = \max A$ から $f^{-1}(y) \preceq_X a$ が成り立つ. 順序同型写像 f は順序を保つので, $y \preceq_Y f(a)$ がわかる. これは, $f(a) = \max f(A)$ を示す. 残りの主張も同様に示される. ■

例 12.17 実数 \mathbb{R} , 有理数 \mathbb{Q} , 整数 \mathbb{Z} , 自然数 \mathbb{N} は通常的大小関係 \leq によって全順序集合である. これらは互いに順序同型ではない. まず, \mathbb{R} はほかの3つとは濃度が異なるのでそもそも全単射が存在せず, 順序同型になり得ない. 次に, 自然数 \mathbb{N} には最小元 $\min \mathbb{N} = 1$ が存在するが, 有理数 \mathbb{Q} と整数 \mathbb{Z} には最小元が存在しないので, \mathbb{N} と \mathbb{Q} , \mathbb{N} と \mathbb{Z} は順序同型になり得ない (定理 12.16). 最後に, \mathbb{Q} と \mathbb{Z} が順序同型にならないことを示す. 順序同型写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ が存在したとする. $f(1) < f(2)$ に注意して, $a = (f(1) + f(2))/2$ を考えれば, $a \in \mathbb{Q}$ かつ $f(1) < a < f(2)$ となる. これに順序同型写像 $f^{-1}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を適用すると, $1 < f^{-1}(a) < 2$ と $f^{-1}(a) \in \mathbb{Z}$ が得られて矛盾に陥る. したがって, \mathbb{Q} と \mathbb{Z} は順序同型ではない.

■ **辞書式順序** $(X, \prec_X), (Y, \prec_Y)$ を順序集合とする. 直積集合 $X \times Y$ 上の2項関係 \prec を

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & x_1 \prec_X x_2, \\ \text{または (ii)} & x_1 = x_2, y_1 \prec_Y y_2 \end{cases}$$

のように定義すると, 容易にわかるように, \prec は等号なしの順序関係になる. これを $X \times Y$ 上の**辞書式順序**という.

順序集合の列 X_1, \dots, X_n が与えられたとき, 直積集合 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 上にも同様に辞書式順序が定義される. 辞書に単語をアルファベット順に収録するときの順序がまさにこれである.

問 12.5 $a < b$ を実数とする. 开区間 (a, b) を \mathbb{R} の部分順序集合とみなすとき, (a, b) と \mathbb{R} は順序同型であることを示せ. 次に, 閉区間 $[a, b]$ と \mathbb{R} は順序同型ではないことを示せ.

問 12.6 実数 x, y に対して, $x \leq y$ のとき $y \preceq x$ と定義する.

- (1) (\mathbb{R}, \preceq) は全順序集合になることを示せ.
- (2) (\mathbb{R}, \preceq) と (\mathbb{R}, \leq) は順序同型であることを示せ.
- (3) (\mathbb{N}, \preceq) と (\mathbb{N}, \leq) は順序同型ではないことを示せ.

問 12.7 X, Y が全順序集合であれば, 辞書式順序を備えた $X \times Y$ も全順序集合になることを示せ.

問 12.8 $A = \{1, 2\}$, \mathbb{N} を通常的大小を備えた順序集合とする. このとき, 辞書式順序を与えた直積集合 $A \times \mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times A$ は順序同型ではないことを示せ.

12.3 ツォルンの補題

順序集合に極大元があるための使いやすい十分条件を与えておこう.

定理 12.18 (ツォルンの補題)²⁾ 空でない順序集合 X において, すべての全順序部分集合が上界をもつならば X には極大元が存在する.

すべての全順序部分集合が上界をもつような順序集合をツォルン集合と呼ぶ. そうすると, ツォルンの補題 (定理 12.18) は, ツォルン集合には極大元が存在することを主張する. 証明は長いので, いくつかの段階に分割する.³⁾

以下では, (X, \preceq) をツォルン集合として, X の全順序部分集合をすべて集めてできる集合を \mathcal{M} とする. 定義によって, 空集合 \emptyset は X の全順序部分集合であるから, $\emptyset \in \mathcal{M}$ となる. つまり, \mathcal{M} は空ではない. さらに, \mathcal{M} は X の部分集合族なので, 集合の包含関係によって順序集合 (\mathcal{M}, \subset) となる.

補題 12.19 \mathcal{N} が (\mathcal{M}, \subset) の全順序部分集合であれば, $\bigcup \mathcal{N} \in \mathcal{M}$ である.

²⁾Max August Zorn (1906–1993). ドイツの数学者. 1935 年に, 整列可能定理に代わる集合論の公理として提案して, 代数におけるいくつかの応用を示した [60]. ツォルン自身は「補題」とは呼んでおらず, MP (maximum principle, 極大原理) と称した. その論文で選択公理と整列可能定理の同値性を予告したが, 公表されなかったようである.

³⁾ここでは松村 [3], Halmos [41] にしたがって, 集合と写像を用いた初等的な証明を紹介する. 超限帰納法による証明もあり, それは簡潔で直感的なのだが, そのためには整列集合の理論を準備する必要がある.

証明 $x, y \in \bigcup \mathcal{N}$ とすると, $x \in A, y \in B$ を満たす $A, B \in \mathcal{N}$ が存在する. (\mathcal{N}, \subset) は全順序集合であるから, $A \subset B$ または $B \subset A$ が成り立つ. 前者であれば, $x, y \in B$ となり, 後者であれば $x, y \in A$ となる. いずれにせよ, x, y は X の全順序部分集合 A または B の元であるから, x, y は比較可能である. つまり, $\bigcup \mathcal{N}$ は X の全順序部分集合である. ■

補題 12.20 $A \in \mathcal{M}$ として,

$$U(A) = \{u \in X \mid \text{すべての } a \in A \text{ に対して } a \preceq u\}$$

とおく (X の部分集合として A の上界の集合である). もし, $U(A) \subset A$ であれば, $U(A)$ のすべての元は X の極大元である. 特に, X に極大元が存在する.

証明 A はツォルン集合 X の全順序部分集合なので, ツォルン集合の定義によって, $U(A) \neq \emptyset$ である. さて, $u \in U(A)$ は A の上界であるから, すべての $a \in A$ に対して $a \preceq u$ が成り立つ. 一方, 仮定 $U(A) \subset A$ によって $u \in A$ であるから, $u = \max A$ である. もし $u \prec v$ となる $v \in X$ が存在すると, $v \in U(A)$ であり, $U(A) \subset A$ と合わせて $v \in A$ を得る. これは $u = \max A$ に矛盾する. したがって, $u \prec v$ となる $v \in X$ は存在せず, u は X の極大元である. ■

以下, (X, \preceq) をツォルン集合であって極大元をもたないものとする. 矛盾を導くことによって, ツォルンの補題 (定理 12.18) を証明する.

まず, 補題 12.20 によって, すべての $A \in \mathcal{M}$ に対して $U(A) \not\subset A$ であるから, $U(A) \setminus A \neq \emptyset$ である. 選択公理 (AC2) によって, $U(A) \setminus A$ から元を 1 つ選んで $f(A)$ とする. $A \cup \{f(A)\}$ が X の全順序部分集合になることは明らかであるから, 写像

$$g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad g(A) = A \cup \{f(A)\}, \quad A \in \mathcal{M},$$

が定義される. この写像 g は, X の全順序部分集合 A に対して, その先にある元を 1 個付け加わって A を拡大する操作を表す.

\mathcal{M} の部分集合 \mathcal{T} が次の性質を満たすときタワーと呼ぶことにする.

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- (ii) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow g(A) \in \mathcal{T}$
- (iii) $S \subset \mathcal{T}$ が全順序部分集合であれば, $\bigcup S \in \mathcal{T}$.

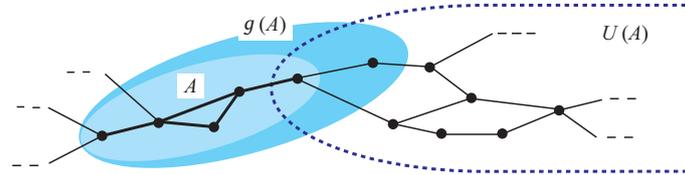


図 12.2: 写像 $g : M \rightarrow M$

M 自身がタワーであるから、タワーは存在する。そこで、すべてのタワーの共通部分を \mathcal{T}_0 とすると、 \mathcal{T}_0 も (i)–(iii) を満たすことは明らかである。つまり、 \mathcal{T}_0 は最小のタワーである。

補題 12.21 $A \in \mathcal{T}_0$ は \mathcal{T}_0 のすべての元と比較可能とする。このとき、任意の $B \in \mathcal{T}_0$ は $B \subset A$ または $g(A) \subset B$ を満たす。

証明 そのような A を固定して、

$$U = \{B \in \mathcal{T}_0 \mid B \subset A \text{ または } g(A) \subset B\}$$

とおく。証明のためには、 $U = \mathcal{T}_0$ を示せばよい。ここで、 $U \subset \mathcal{T}_0$ は明らかなので、 U がタワーであることを示せば、 \mathcal{T}_0 が最小のタワーであることから $U = \mathcal{T}_0$ がわかる。そこで、 U がタワーであることを示す。

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}_0$ かつ $\emptyset \subset A$ であるから、 $\emptyset \in U$ が成り立つ。

(ii) $B \in U$ とする。つまり、(iia) $B \subset A$ 、または (iib) $g(A) \subset B$ が成り立つ。このことから $g(B) \in U$ を示せばよい。まず、 $B \in \mathcal{T}_0$ であるから、タワーの定義によって $g(B) \in \mathcal{T}_0$ はよい。

(iia) $B \subset A$ とする。 A は \mathcal{T}_0 のすべての元と比較可能であるから、 $g(B)$ とも比較可能である。したがって、 $g(B) \subset A$ または $A \subset g(B)$ が成り立つ。前者なら $g(B) \in U$ である。後者とする、 $B \subset A \subset g(B) = B \cup \{f(B)\}$ であるから、 $A = B$ または $A = g(B)$ である。 $A = B$ なら $g(A) = g(B)$ 、特に $g(A) \subset g(B)$ なので $g(B) \in U$ 。 $A = g(B)$ ならば、特に $g(B) \subset A$ であるから、やはり $g(B) \in U$ 。いずれの場合も $g(B) \in U$ が示された。

(iib) $g(A) \subset B$ とする。このとき、 $g(A) \subset B \subset g(B)$ であるから $g(A) \subset g(B)$ が成り立つ。したがって、 $g(B) \in U$ である。

(iii) $S \subset U$ を全順序部分集合として,

$$B = \bigcup S = \bigcup_{C \in S} C$$

とおく. $B \in U$ を示したい. まず, $U \subset \mathcal{T}_0$ なので $S \subset \mathcal{T}_0$ である. \mathcal{T}_0 はタワーであるから, その定義によって $B \in \mathcal{T}_0$ はよい. 次に, $S \subset U$ なので, 各 $C \in S$ ごとに $C \subset A$ または $g(A) \subset C$ となる. もしすべての $C \in S$ が $C \subset A$ を満たせば, $B \subset A$ となる. もし $g(A) \subset C_0$ を満たす $C_0 \in S$ が存在すれば, $g(A) \subset C_0 \subset B$ である. したがって, $B \subset A$ または $g(A) \subset B$ が成り立ち, $B \in U$ となる. ■

補題 12.22 \mathcal{T}_0 は M の全順序部分集合である.

証明 簡単のため,

$$\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{T}_0 \mid A \text{ はすべての } B \in \mathcal{T}_0 \text{ と比較可能}\}$$

とおく. 定義から $\mathcal{Z} \subset \mathcal{T}_0$ であり, \mathcal{T}_0 が最小のタワーであることから \mathcal{Z} がタワーになることを示せば, $\mathcal{Z} = \mathcal{T}_0$ となり主張が成り立つ. では, \mathcal{Z} がタワーになることを示そう.

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}_0$ であり, \emptyset はすべての $B \in \mathcal{T}_0$ に対して $\emptyset \subset B$ を満たす. したがって, $\emptyset \in \mathcal{Z}$ である.

(ii) $A \in \mathcal{Z}$, つまり $A \in \mathcal{T}_0$ は \mathcal{T}_0 のすべての元と比較可能であるものとする. 補題 12.21 によって, すべての $B \in \mathcal{T}_0$ に対して $B \subset A$ または $g(A) \subset B$ が成り立つ. 前者であれば, $B \subset A \subset g(A)$ なので, $B \subset g(A)$ である. 後者と合わせると, $g(A)$ はすべての $B \in \mathcal{T}_0$ と比較可能であることがわかる. したがって, $g(A) \in \mathcal{Z}$ が成り立つ.

(iii) $S \subset \mathcal{Z}$ を全順序部分集合として, $\bigcup S \in \mathcal{Z}$ を示す. 以下, 簡単のため,

$$A = \bigcup S = \bigcup_{C \in S} C \tag{12.1}$$

とおく. A が任意の $B \in \mathcal{T}_0$ と比較可能であることを言えばよい. もし $C_0 \in S$ で $B \subset C_0$ を満たすものが存在すれば, $B \subset C_0 \subset A$ が成り立つ. そうでなければ, すべての $C \in S$ が $B \not\subset C$ を満たす. $S \subset \mathcal{Z}$ と \mathcal{Z} の定義から C は $B \in \mathcal{T}_0$

と比較可能なので $C \subset B$ となる. したがって, (12.1) によって $A \subset B$ が得られる. いずれにせよ, $B \subset A$ または $A \subset B$ が成り立ち, A は任意の $B \in \mathcal{T}_0$ と比較可能である. ■

ツォルンの補題 (定理 12.18) の証明の完成 \mathcal{T}_0 はタワーであり, 補題 12.22 から, それ自身が \mathcal{T}_0 の全順序部分集合である. そうすると, タワーの性質 (iii) から

$$A_0 = \bigcup \mathcal{T}_0 \quad (12.2)$$

は $A_0 \in \mathcal{T}_0$ を満たし, 性質 (ii) によって $g(A_0) \in \mathcal{T}_0$ となり, (12.2) から $g(A_0) \subset A_0$ がわかる. さらに, 定義によって $g(A_0) = A_0 \cup \{f(A_0)\}$ であるから, $f(A_0) \in A_0$ が得られる. これは, $f(A_0)$ を $U(A_0) \setminus A_0$ から選んだことに矛盾する. この矛盾は X に極大元が存在しないと仮定したことから生じたので, X には極大元が存在する.

■ 選択公理 ツォルンの補題 (定理 12.18) の証明に選択公理 (AC2) を用いたので, 選択公理からツォルンの補題が導かれたとすることができる. 実は, 逆も正しく, 次の主張が成り立つ.

定理 12.23 選択公理とツォルンの補題は同値である.

証明 ツォルンの補題を用いて選択公理 (AC2) を証明すればよい. Ω を空でない集合族で $\emptyset \notin \Omega$ とする. 部分集合 $\mathcal{D} \subset \Omega$ と写像 $f: \mathcal{D} \rightarrow \bigcup \Omega$ の対 (\mathcal{D}, f) で, すべての $A \in \mathcal{D}$ に対して $f(A) \in A$ を満たすものの全体を \mathcal{Z} とする. まず, \mathcal{Z} は空ではない. 実際, $A \in \Omega$ を一つとれば, $A \neq \emptyset$ より $a \in A$ が存在する. 写像 $f: \{A\} \rightarrow \bigcup \Omega$ を $f(A) = a$ で定義すれば, 明らかに $(\{A\}, f) \in \mathcal{Z}$ である. 次に, \mathcal{Z} 上の 2 項関係 $(\mathcal{D}_1, f_1) \preceq (\mathcal{D}_2, f_2)$ を $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ であり, すべての $A \in \mathcal{D}_1$ に対して $f_1(A) = f_2(A)$ が成り立つものと定義すると, (\mathcal{Z}, \preceq) は順序集合になる.

(\mathcal{Z}, \preceq) がツォルン集合になることを示そう. 与えられた全順序部分集合 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ に対して, Ω の部分集合を

$$\mathcal{E} = \bigcup_{(\mathcal{D}, f) \in \mathcal{Y}} \mathcal{D} \quad (12.3)$$

とにおいて, 写像 $g: \mathcal{E} \rightarrow \bigcup \Omega$ を次のように定義する. 任意の $x \in \mathcal{E}$ に対して, ある $(\mathcal{D}, f) \in \mathcal{Y}$ が存在して $x \in \mathcal{D}$ となるので, $g(x) = f(x)$ とおく. こ

ここで, $x \in \mathcal{D}$ を満たす $(\mathcal{D}, f) \in \mathcal{Y}$ の選び方は一意的ではないが, 選び方によらず $f(x)$ は一定であるから写像 g が定義できる. このことを確認しておこう. $(\mathcal{D}_1, f_1), (\mathcal{D}_2, f_2) \in \mathcal{Y}$ で $x \in \mathcal{D}_1, x \in \mathcal{D}_2$ とする. \mathcal{Y} が全順序部分集合だから, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ または $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ が成り立つ. いずれにせよ $f_1(x) = f_2(x)$ となり, 確かに $g(x)$ の値は $x \in \mathcal{D}, (\mathcal{D}, f) \in \mathcal{Y}$ の取り方によらない. 明らかに, (\mathcal{E}, g) は \mathcal{Z} の元であって, \mathcal{Y} の上限である. したがって, (\mathcal{Z}, \preceq) はツォルン集合である.

(\mathcal{Z}, \preceq) にツォルンの補題を適用すれば, 極大元 $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{f}) \in \mathcal{Z}$ が存在する. もし, $\tilde{\mathcal{D}} \neq \Omega$ であれば, $A_0 \in \Omega \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ が存在する. A_0 は空ではないので $a_0 \in A_0$ をとって,

$$h(A) = \begin{cases} a_0, & A = A_0, \\ \tilde{f}(A), & A \in \tilde{\mathcal{D}}, \end{cases}$$

とおくと, 写像 $h: \tilde{\mathcal{D}} \cup \{A_0\} \rightarrow \bigcup \Omega$ が得られる. 明らかに, $(\tilde{\mathcal{D}} \cup \{A_0\}, h) \in \mathcal{Z}$ であり, $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{f}) \prec (\tilde{\mathcal{D}} \cup \{A_0\}, h) \in \mathcal{Z}$ となる. これは $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{f}) \in \mathcal{Z}$ が極大元であることに矛盾する. よって, $\tilde{\mathcal{D}} = \Omega$ であり, \tilde{f} は Ω の選択関数である. ■