第13章　整列集合

すべての自然数を小さいものから順に 1 列に並べれば,

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

のような見慣れた配列が得られる．これは, 自然数に通常の大小による順序関係を与えて得られる全順序集合 $(\mathbb{N}, \leq)$ の 1 つの簡便な表示である．一般の全順序集合に対しても, 任意の 2 元が比較可能であることから, すべての元が 1 列に並んでいるとは言えるが, 自然数の配列にはいろいろと特異な点がある．本章では, この自然数の配列の特徴を抽象化した概念である整列順序を導入して, すべての集合に整列順序を定義できること (整列可能定理) を証明する.

13.1　整列集合

順序集合 $(X, \preccurlyeq)$ は, すべての空でない部分集合が最小元をもつとき, **整列集合**であるといい, そのような順序を**整列順序**という．定義から整列集合は必ず全順序集合であることに注意しよう．実際, $a, b \in X$ に対して集合 $\{a, b\}$ は X の空でない部分集合になるから, それは最小元をもつ．最小元は a または b であるが, それが a であれば $a \preccurlyeq b$ となるし, それが b であれば $b \preccurlyeq a$ となる．これは, 任意の $a, b \in X$ が比較可能であることを意味し, X は全順序集合であることがわかる．定義から空でない整列集合 X それ自身は最小元 $\min X$ をもつ.

定 理 13.1 自然数 $(\mathbb{N}, \leq)$ は整列集合である.

証 明　いつも通り, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ と書くことにする．$A \subset \mathbb{N}$ を空でない部分集合とする．このとき,

$$A = A \cap \mathbb{N} = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} [n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [n]$$

と $A \neq \emptyset$ から, $A \cap [n] \neq \emptyset$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．そこで, $\mathbb{N}$ の部分集合 A が $A \cap [n] \neq \emptyset$ を満たせば A は最小元をもつことを示せばよい．

そのことを数学的帰納法で証明する．まず, $n = 1$ のときは $A \cap [1] \neq \emptyset$ から $1 \in A$ がわかる．1 は自然数の中で最小であるから, 確かに A は最小元をもつ．次に $n \geq 1$ まで主張が正しいと仮定して, $A \cap [n+1] \neq \emptyset$ とする．もし, $A \cap [n] \neq \emptyset$ であれば帰納法の仮定から A は最小元をもつ．$A \cap [n] = \emptyset$ であれば, $A \cap [n+1] \neq \emptyset$ と合わせて $n+1$ が A の最小元であることがわかる． ∎

一方, 実数 $\mathbb{R}$, 有理数 $\mathbb{Q}$, 整数 $\mathbb{Z}$ は通常の大小関係 $\leq$ によって全順序集合であるが, いずれも整列集合ではない．それらには最小元がないからである．だからと言って, 実数や有理数を 0 以上のものに限っても整列集合にはならない．たとえば, $X = [0, +\infty)$ の部分集合 $A = (0, +\infty)$ には最小元が存在しない．

ここで, 自然数を並び替えて得られる順序の例をいくつか考えておこう．

例 13.2 自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ に対して, $x \geq y$ のとき $x \preccurlyeq y$ と定義すれば, 全順序集合 $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ が得られる (問 12.6)．要は,

$$\ldots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

のように, 自然数を通常とは逆順に並べることに相当する．この配列には $\min \mathbb{N}$ が存在しないから, $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ は整列集合ではない．

例 13.3 自然数 $\mathbb{N}$ のふつうの配列において, 初めの n 項を最後尾に並べ替えると,

$$n+1 \quad n+2 \quad n+3 \quad \ldots\ldots \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n-1 \quad n \tag{13.1}$$

のようになる．これをもとに $\mathbb{N}$ に全順序 $\preccurlyeq$ が定義される．つまり, $x, y \in \mathbb{N}$ に対して

$$x \preccurlyeq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i) } x \leq n,\ y \leq n,\ x \leq y, \\ \text{または (ii) } x \geq n+1,\ y \geq n+1,\ x \leq y, \\ \text{または (iii) } x \geq n+1,\ y \leq n, \end{cases}$$

と定義するのである．このとき, 全順序集合 $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ は整列集合になる．実際, 空でない部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ が与えられたとき, A が $n+1$ 以上の自然数を含めば, それらの中で (通常の大小で) 最小のものが $\min A$ を与え, A が n 以下の自然数

のみからなるときは, それらの中で (通常の大小で) 最小のものが $\min A$ を与える. いずれにせよ, 任意の空でない部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ は最小元をもつので, $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ は整列集合である.

例 13.4 自然数を偶数と奇数を分けて, 偶数同士, 奇数同士では通常の大小を考え, 偶数と奇数では奇数の方が小さいとする順序関係 $\preccurlyeq_1$ を導入する. この順序に関して自然数を書き並べれば,

$$1\ 3\ 5\ \ldots\ 2\ 4\ 6\ \ldots \tag{13.2}$$

のような配列が得られる. こうして得られる全順序集合 $(\mathbb{N}, \preccurlyeq_1)$ は整列集合になる. 実際, 任意の空でない部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ が与えられたとき, A が奇数を含めば A に含まれる奇数のうち最小のものが $\min A$ を与え, A が偶数のみからなるときは, A に属する偶数のうち最小のものが $\min A$ を与える.

次に, 整列集合の簡単な性質を述べておく.

定 理 13.5 整列集合の部分順序集合は整列集合である.

証 明　$(X, \preccurlyeq)$ を整列集合, $(Y, \preccurlyeq)$ を部分順序集合とする. A を Y の空でない部分集合とすれば, それは整列集合 X の空でない部分集合であるから $\min A$ が存在する. したがって, $(Y, \preccurlyeq)$ は整列集合である. ∎

順序集合 $(X, \prec)$ において, $y \in X$ が $x \in X$ の**後続元**であるとは, $x \prec y$ であり, $x \prec z \prec y$ を満たす $z \in X$ が存在しないときにいう.

定 理 13.6 $(X, \preccurlyeq)$ を整列集合とする. $x \in X$ が $x \neq \max X$ であれば, x には後続元が一意的に存在する.

証 明　$A = \{z \in X \,|\, x \prec z\}$ とおく. $x \neq \max X$ であるから A は X の空でない部分集合になる. 整列集合の定義によって, $y = \min A$ が一意的に存在して, もちろん $x \prec y$ である. もし $x \prec z \prec y$ となる $z \in X$ が存在すれば, $z \in A$ となり $y = \min A$ に矛盾する. したがって, y は x の後続元である. ∎

定 理 13.7 $(X, \preccurlyeq)$ を整列集合とする. $f : X \longrightarrow X$ を順序を保つ単射とすれば, すべての $x \in X$ に対して $x \preccurlyeq f(x)$ が成り立つ.

証 明　$A = \{x \in X \mid f(x) \prec x\}$ が空集合であることを示せばよい．仮に，$A \neq \emptyset$ とすると，その最小元を $a = \min A$ とおき，$b = f(a)$ とする．まず，$a \in A$ であるから $f(a) \prec a$，すなわち $b \prec a$ が成り立つ．これに f は順序を保つ単射であることを適用して，$f(b) \prec f(a) = b$ が得られる．これは $b \in A$ を意味する．そうすると，$b \prec a$ と合わせて，a が A の最小元であることに矛盾する．したがって，A は空集合である．∎

定 理 13.8 2 つの整列集合 X, Y が順序同型であれば，X から Y への順序同型写像は一意的に定まる．特に，整列集合からそれ自身への順序同型写像は恒等写像に限る．

証 明　混乱はないだろうから，X, Y の順序を同じ記号 $\preccurlyeq$ で書く．2 つの順序同型写像 $f : X \longrightarrow Y$，$g : X \longrightarrow Y$ が与えられたとする．このとき，$g^{-1} \circ f : X \longrightarrow X$ は順序同型写像であるから，定理 13.7 が適用できて，

$$x \preccurlyeq g^{-1} \circ f(x), \qquad x \in X,$$

が得られる．さらに，写像 g は順序を保つので，

$$g(x) \preccurlyeq f(x), \qquad x \in X, \tag{13.3}$$

が成り立つ．同様に，順序同型写像 $f^{-1} \circ g : X \longrightarrow X$ から始めれば，

$$f(x) \preccurlyeq g(x), \qquad x \in X, \tag{13.4}$$

が得られる．(13.3), (13.4) から，すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立ち，2 つの順序同型写像 f, g は一致する．後半は，恒等写像が順序同型写像であることから明らかである．∎

問 13.1 整列集合に順序同型な順序集合は整列集合であることを示せ．

問 13.2 自然数 $\mathbb{N}$ に通常の大小による順序を与えた整列集合 $(\mathbb{N}, \leq)$，例 13.3 の $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$，例 13.4 の $(\mathbb{N}, \preccurlyeq_1)$ はどの 2 つも順序同型ではないことを示せ．

問 13.3 有限な全順序集合は整列集合であることを示せ．

問 13.4 整列集合 $(X, \preccurlyeq)$ には無限下降列が存在しない．ただし，無限下降列とは，X の元の列 $x_1, x_2, \cdots \in X$ で

$$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ x_{n+1} \succ \cdots$$

を満たすものをいう．

13.2　整列集合の基本定理

本節では，整列集合が 2 つ与えられたとき，どちらか一方は他方を延長したものであるという基本定理を証明する．そのために切片という概念が重要になる．

$(X, \preccurlyeq)$ を整列集合とする．$a \in X$ に対して

$$X\langle a\rangle = \{x \in X \mid x \prec a\}$$

を X の a による**切片**という．定義によって，$a \notin X\langle a\rangle$ であり，$a = \min X$ のときは $X\langle a\rangle = \emptyset$ となる．対応 $a \mapsto X\langle a\rangle$ は $(X, \preccurlyeq)$ から $(2^X, \subset)$ への順序を保つ単射になる．切片を用いることで，抽象的に与えられた順序をより具体的な集合の包含関係で議論できるようになる．

補 題 13.9 整列集合 $(X, \preccurlyeq)$ の真部分集合 A に対して，次は同値である．

(i) A は切片である

(ii) $x \in A,\ y \in X,\ y \prec x \ \Rightarrow\ y \in A.$

このとき，$a = \min A^c$ とすれば，$A = X\langle a\rangle$ が成り立つ．

証 明　(i) $\Rightarrow$ (ii)．切片の定義から，ある $a \in X$ によって $A = X\langle a\rangle$ と書ける．さて，$x \in A,\ y \in X$ が $y \prec x$ を満たすものとする．$X\langle a\rangle$ の定義から $x \prec a$ であり，$y \prec x$ と合わせて $y \prec a$ が得られる．これは $y \in A$ を意味する．

(ii) $\Rightarrow$ (i)．A は真部分集合であるという仮定から，A^c は整列集合 X の空集合でない部分集合である．したがって，最小元 $a = \min A^c$ が存在する．$A = X\langle a\rangle$ を示せばよい．まず，$x \in X\langle a\rangle$ であれば，切片の定義から $x \prec a$ である．一方，$a = \min A^c$ であるから，$x \notin A^c$ である．したがって，$x \in A$ であり，$X\langle a\rangle \subset A$ が示された．逆に，$x \in A$ とする．もし $a \prec x$ ならば，条件 (ii) によって $a \in A$ である．これは $a = \min A^c$ であり，特に $a \in A^c$ であることに矛盾する．ま

た, $a = x$ であれば, $x \in A^c$ となりやはり矛盾. したがって, $x \prec a$ であり, $x \in X\langle a \rangle$ となる. これは, $A \subset X\langle a \rangle$ を示す. ■

X を整列集合, $a \in X$ とすれば, 切片 $X\langle a \rangle$ は部分順序集合として整列集合であることに注意しておく (定理 13.5). そうすると, $b \in X\langle a \rangle$ に対して整列集合 $X\langle a \rangle$ の b による切片 $(X\langle a \rangle)\langle b \rangle$ が定義される. 明らかに,

$$(X\langle a \rangle)\langle b \rangle = X\langle b \rangle, \qquad a, b \in X, \quad b \prec a \tag{13.5}$$

が成り立つ.

定 理 13.10 X を整列集合とする.

(1) 任意の $a \in X$ に対して, X と $X\langle a \rangle$ は順序同型にならない.
(2) $a, b \in X$ に対して, $X\langle a \rangle$ と $X\langle b \rangle$ が順序同型になるのは $a = b$ に限る.

証 明 (1) 包含写像 $i : X\langle a \rangle \longrightarrow X$ は順序を保つ単射であり, 切片の定義から

$$i(y) \prec a, \qquad y \in X\langle a \rangle \tag{13.6}$$

が成り立つ. 順序同型写像 $f : X \longrightarrow X\langle a \rangle$ が存在したと仮定する. 合成写像 $i \circ f : X \longrightarrow X$ は順序を保つ単射になるから, 定理 13.7 によって,

$$x \preccurlyeq i \circ f(x), \qquad x \in X, \tag{13.7}$$

が成り立つ. 特に, $x = a$ とおくと, $a \preccurlyeq i \circ f(a)$ が得られる. 一方, (13.6) において $y = f(a)$ とおくと, $i \circ f(a) \prec a$ が得られて矛盾する. したがって, 順序同型写像 $f : X \longrightarrow X\langle a \rangle$ は存在しない.

(2) $a \prec b$ に対して $X\langle a \rangle$ と $X\langle b \rangle$ 順序同型であるとする. そうすると, $X\langle a \rangle = (X\langle b \rangle)\langle a \rangle$ に注意すれば, 整列集合 $X\langle b \rangle$ がその切片と順序同型になる. これは (1) の結果に反する. 同様に, $b \prec a$ からも矛盾が生じるので $a = b$ でなければならない. ■

補 題 13.11 X, Y を整列集合として, $f : X \longrightarrow Y$ を順序を保つ単射とする. このとき, 任意の $a \in X$ に対して次が成り立つ.

$$f(X\langle a \rangle) = Y\langle f(a) \rangle \cap f(X). \tag{13.8}$$

証 明 まず, (13.8) において包含関係 $\subset$ を示す. $y \in f(X\langle a\rangle)$ とすれば, ある $x \in X\langle a\rangle$ が存在して $y = f(x)$ と書ける. このとき, $x \prec a$ である. f は順序を保つ単射であるから, $f(x) \prec f(a)$ が成り立ち, $y \in Y\langle f(a)\rangle$ が得られる.

次に, 逆向きの包含関係 $\supset$ を示す. $y \in Y\langle f(a)\rangle \cap f(X)$ とすれば, ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ かつ $f(x) \prec f(a)$ が成り立つ. f は順序を保つ単射であるから, $x \prec a$ であり $x \in X\langle a\rangle$ がわかる. したがって, $y \in f(X\langle a\rangle)$ である. ∎

補 題 13.12 X, Y を整列集合とする. このとき,

$$A = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } y \in Y \text{ が存在して,} \\ X\langle x\rangle \text{ と } Y\langle y\rangle \text{ が順序同型になる} \end{array} \right\} \tag{13.9}$$

は X に一致するか, または X の切片である.

証 明 $A \neq X$ と仮定して, A が X の切片になることを示せばよい. そのためには補題 13.9 の条件 (ii) を確かめればよい. $x \in A$, $z \in X$, $z \prec x$ とする. 仮定によって, ある $y \in Y$ と順序同型写像 $f : X\langle x\rangle \longrightarrow Y\langle y\rangle$ が存在する. $z \prec x$ から $z \in X\langle x\rangle$ であるから, 補題 13.11 によって, $f((X\langle x\rangle)\langle z\rangle) = (Y\langle y\rangle)\langle f(z)\rangle$ が成り立つ. これに (13.5) を適用すれば, $f(X\langle z\rangle) = Y\langle f(z)\rangle$ が得られる. このことから, f を $X\langle z\rangle$ に制限した写像が $X\langle z\rangle$ から $Y\langle f(z)\rangle$ の上への順序同型写像になる. したがって, $z \in A$ である. ∎

補 題 13.13 X, Y を整列集合とする. $A \subset X$ を補題 13.12 で定めたものとする. このとき, $x \in A$ であれば, $X\langle x\rangle$ と $Y\langle y\rangle$ が順序同型になるような $y \in Y$ は一意的に存在し, 対応 $x \mapsto y$ によって定まる写像 $f : A \longrightarrow Y$ は順序を保つ単射である.

証 明 $x \in A$ とする. 2 つの $y, y' \in Y$ が存在して $X\langle x\rangle$ と $Y\langle y\rangle$, $X\langle x\rangle$ と $Y\langle y'\rangle$ が順序同型になったとする. このとき, $Y\langle y\rangle$ と $Y\langle y'\rangle$ が順序同型になるから, 定理 13.10 (2) によって $y = y'$ である.

次に, 写像 $f : x \mapsto y$ が順序を保つ単射であることを示す. そのためには, $x_1, x_2 \in A$ が $x_1 \prec x_2$ を満たせば $f(x_1) \prec f(x_2)$ となることを示せばよい. まず, $X\langle x_2\rangle$ と $Y\langle f(x_2)\rangle$ は順序同型なので, それを与える順序同型写像を $g : X\langle x_2\rangle \longrightarrow Y\langle f(x_2)\rangle$ とおく. $x_1 \prec x_2$ であるから, $g(x_1) \prec g(x_2)$ が成り立

つ. (13.5) に注意して, 補題 13.11 を用いれば,

$$g(X\langle x_1\rangle) = g((X\langle x_2\rangle)\langle x_1\rangle) = (Y\langle f(x_2)\rangle)\langle g(x_1)\rangle = Y\langle g(x_1)\rangle$$

が得られる. したがって, $X\langle x_1\rangle$ と $Y\langle g(x_1)\rangle$ は順序同型である. 一方, 写像 f の定義から $X\langle x_1\rangle$ と $Y\langle f(x_1)\rangle$ が順序同型であるから, $Y\langle g(x_1)\rangle$ と $Y\langle f(x_1)\rangle$ が順序同型になり, 定理 13.10 (2) によって $g(x_1) = f(x_1)$ が得られる. ここで, $g(x_1) \in Y\langle f(x_2)\rangle$ に注意して, $f(x_1) \prec f(x_2)$ が得られる. ■

定 理 13.14 整列集合 X, Y に対して次の 3 つの場合のうち, いずれか 1 つだけが成り立つ.

(i) X と Y は順序同型である.
(ii) X と Y の切片が順序同型である.
(iii) X の切片と Y が順序同型である.

証 明　X の部分集合 A と順序を保つ単射 $f : A \longrightarrow Y$ を補題 13.12, 補題 13.13 のようにとる. A は X に一致するか, または X の切片である.

まず, $A = X$ の場合を考えよう. もし $f(X) = Y$ であれば, f は X から Y の上への順序同型写像となり, X と Y が順序同型になる. $f(X) \neq Y$ とする. 補題 13.9 にしたがって, $f(X)$ が Y の切片であることを示そう. $y \in Y$, $a \in X$, $y \prec f(a)$ とする. 写像 f の定義から $X\langle a\rangle$ と $Y\langle f(a)\rangle$ は順序同型であり, 順序同型写像は f を $X\langle a\rangle$ に制限したもので与えられる. そうすると, $y \in Y\langle f(a)\rangle$ に対して $x \in X\langle a\rangle$ が存在して $f(x) = y$ となる. こうして $y \in f(X)$ が得られたから, $f(X)$ は Y の切片である. 特に, f は X から Y の切片の上への順序同型写像となり, X と Y 切片が順序同型になる.

次に, A が X の切片である場合, つまり, ある $a \in X$ によって $A = X\langle a\rangle$ となる場合を考える. もし $f(A) = Y$ であれば, X の切片 $X\langle a\rangle$ と Y が順序同型になる. あとは, $f(A) \neq Y$ が起こり得ないことを示せば, (i)–(iii) のいずれかであることが結論される. そこで, $f(A) \neq Y$ と仮定して矛盾を導こう. まず, $f(A)$ が Y の切片であることを示そう. $y \in Y$, $a' \in A$, $y \prec f(a')$ とする. 写像 f の定義から $X\langle a'\rangle$ と $Y\langle f(a')\rangle$ は順序同型であり, 順序同型写像は f を $X\langle a'\rangle$ に制限したもので与えられる. そうすると, $y \in Y\langle f(a')\rangle$ に対して $x \in X\langle b\rangle$ が存在して $f(x) = y$ となる. こうして $y \in f(A)$ が得られたから, $f(A)$ は Y の切片である. そうすると, ある $b \in Y$ によって $f(A) = Y\langle b\rangle$ となり, f は

$A = X\langle a\rangle$ から $Y\langle b\rangle$ の上への順序同型写像となる．そうすると，集合 A の定義によって $a \in A$ が得られて，$A = X\langle a\rangle$ に矛盾する． ∎

問 13.5 X を整列集合とする．$S \subset X$ を空でない部分集合とすると，$\bigcup_{a\in S} X\langle a\rangle$ は X に一致するか，または X の切片になることを示せ．

問 13.6 通常の自然数 $(\mathbb{N}, \leq)$，例 13.3 における $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$，例 13.4 における $(\mathbb{N}, \preccurlyeq_1)$ の 3 つの整列集合に対して，定理 13.14 を確かめよ．(問 13.2 も参照せよ.)

13.3 整列可能定理

与えられた集合に適当な順序を定義して整列集合にできるだろうか．直感的には，集合の元を 1 つずつ順に並べればよいわけで，有限集合に対しては何ら問題ない．しかし，無限集合に対してはどうだろうか．カントルはできると予想し，ツェルメロが証明を与えた.[1)] 実際，ツェルメロは選択公理から整列可能定理を導いたが，ここではツォルンの補題を用いて証明しよう.[2)]

定 理 13.15 (整列可能定理) 任意の集合は，適当な順序を定義することで整列集合にできる．

証 明 X を任意の集合とする．X の部分集合 A とその上の整列順序 $\preccurlyeq_A$ を組にした $(A, \preccurlyeq_A)$ の全体を $\mathcal{M}$ とする．X の部分集合 $A = \emptyset$ 上には整列順序があるので，$\mathcal{M}$ 自身は空ではない．$(A, \preccurlyeq_A), (B, \preccurlyeq_B) \in \mathcal{M}$ に対して，ある $b \in B$ が存在して $A = B\langle b\rangle$ であって，A 上の順序 $\preccurlyeq_A$ が $(B, \preccurlyeq_B)$ の部分順序集合としての順序と一致するとき，$(A, \preccurlyeq_A) \prec (B, \preccurlyeq_B)$ と定義する．この 2 項関係 $\prec$ は $\mathcal{M}$ 上の等号なしの順序となり，順序集合 $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ が得られる．

[1)] カントルは 1883 年の有名な論文 [34] で整列集合の概念を与えて，すべての集合を整列集合にできることは原理であり自明なことであると主張した．後年になって，証明を試みたようであるが成果は得られず，連続体仮説とともにカントルの残した集合論の大きな課題となった．1904 年にツェルメロは選択公理 (AC2) を原理として提起して，それを用いて整列可能定理を証明した [58]．その議論は大論争を巻き起こしたが，情況が明らかになる中で，ツェルメロは集合の公理を提示するとともに，整列可能定理の別証明を与えた [59] (1908).

[2)] 赤 [1] にはツェルメロのもとの証明にしたがった議論が収められている．

$(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ がツォルン集合であることを示す．$\mathcal{N}$ を $\mathcal{M}$ の全順序部分集合とする．まず, X の部分集合

$$Y = \bigcup_{(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{N}} A \tag{13.10}$$

の上に順序 $\preccurlyeq_Y$ を定義しよう．$x, y \in Y$ とすると, ある $(A, \preccurlyeq_A), (B, \preccurlyeq_B) \in \mathcal{N}$ が存在して, $x \in A$, $y \in B$ となる．$\mathcal{N}$ の取り方から, $(A, \preccurlyeq_A) \preccurlyeq (B, \preccurlyeq_B)$ または $(B, \preccurlyeq_B) \preccurlyeq (A, \preccurlyeq_A)$ が成り立つ．同じことなので, 前者が成り立ったとすれば, $x, y \in B$ となり, $x \preccurlyeq_B y$ のときに $x \preccurlyeq_Y y$ と定義する．このとき, $x, y \in B$ となるような $(B, \preccurlyeq_B) \in \mathcal{N}$ の取り方は一意的ではないが, $\mathcal{N}$ が全順序部分集合であることから, $x \preccurlyeq_Y y$ が $(B, \preccurlyeq_B) \in \mathcal{N}$ の取り方によらずに定まることがわかる．こうして, 順序集合 $(Y, \preccurlyeq_Y)$ が定義された．

次に, $(Y, \preccurlyeq_Y)$ が整列集合であること, つまり, $(Y, \preccurlyeq_Y) \in \mathcal{M}$ を示そう．空でない部分集合 $Z \subset Y$ をとる．(13.10) によって,

$$Z = \bigcup_{(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{N}} (A \cap Z)$$

であるから, $A \cap Z \neq \emptyset$ であるような $(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{N}$ が存在する．$(A, \preccurlyeq_A)$ は整列集合であるから, $m = \min A \cap Z$ が存在する．この m は $A \cap Z \neq \emptyset$ であるような $(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{N}$ の取り方によらずに一意的に定まる．実際, $B \cap Z \neq \emptyset$ であるような $(B, \prec_B) \in \mathcal{N}$ をとって $m' = \min B \cap Z$ とおいてみよう．$\mathcal{N}$ が全順序部分集合であることから, $(A, \preccurlyeq_A) \preccurlyeq (B, \preccurlyeq_B)$ または $(B, \preccurlyeq_B) \preccurlyeq (A, \preccurlyeq_A)$ が成り立つ．同じことなので前者が成り立ったとすれば, ある $b \in B$ が存在して, $A = B\langle b \rangle$ となる．そうすると,

$$\begin{aligned} m &= \min A \cap Z = \min B\langle b \rangle \cap Z \\ &= \min\{z \in Z \,|\, z \in B,\ \ z \prec b\} \\ &= \min\{z \in Z \,|\, z \in B\} = \min B \cap Z = m' \end{aligned}$$

が得られる．

これまでに, $\mathcal{M}$ の全順序部分集合 $\mathcal{N}$ から整列集合 $(Y, \preccurlyeq_Y) \in \mathcal{M}$ を構成した．これが $\mathcal{N}$ の上界であることを示そう．そのために, $(A, \preccurlyeq_A) \in \mathcal{N}$ に対して, $(A, \preccurlyeq_A) \preccurlyeq (Y, \preccurlyeq_Y)$ を示せばよい．もし $Y = A$ であれば, 順序 $\preccurlyeq_Y$ の導入の仕方から $\preccurlyeq_Y$ と $\preccurlyeq_A$ が一致する．特に, $(A, \preccurlyeq_A) \preccurlyeq (Y, \preccurlyeq_Y)$ が成り立つ．もし, $Y \neq A$

であれば, $Y \backslash A$ は Y の空でない部分集合になる．ここで, $b = \min Y \backslash A$ として $A = Y\langle b \rangle$ が成り立つことを示そう．そのためには, 補題 13.9 によって, A が Y の切片であることを示せばよい．$x \in A$, $y \in Y$, $y \prec_Y x$ とする．$y \in Y$ であるから, ある $(B, \preccurlyeq_B) \in \mathcal{N}$ が存在して $y \in B$ となる．$A \subset B$ または $B \subset A$ である．前者であれば, $A = B\langle \beta \rangle$ と書ける．したがって, $x \prec_B \beta$. また, $x, y \in B$ であって $y \prec_B x$ である．したがって, $y \prec_B \beta$ となり $y \in B\langle \beta \rangle = A$. 後者であれば, $y \in B \subset A$ より $y \in A$. こうして, A は Y の切片である．順序の入れ方から, A 上の順序 $\preccurlyeq_A$ は $\preccurlyeq_Y$ の制限になっている．こうして, $(A, \preccurlyeq_A) \preccurlyeq (Y, \preccurlyeq_Y)$ が示された．

以上によって, $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ はツォルン集合である．そうすれば, ツォルンの補題によって, $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ には極大元が存在する．それを $(S, \preccurlyeq_S)$ としよう．もし $S \neq X$ であれば, $s \in X \backslash S$ をとって, $\tilde{S} = S \cup \{s\}$ とおく．$\tilde{S}$ 上に順序 $\prec_{\tilde{S}}$ を

$$x \prec_{\tilde{S}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i) } x, y \in S,\ x \prec_S y, \text{ または (ii) } x \in S,\ y = s$$

のように定義すると, $(\tilde{S}, \preccurlyeq_{\tilde{S}})$ は整列集合になる．つまり, $(\tilde{S}, \preccurlyeq_{\tilde{S}}) \in \mathcal{M}$ であり, $(S, \preccurlyeq_S) \prec (\tilde{S}, \preccurlyeq_{\tilde{S}})$ が成り立つから, $(S, \preccurlyeq_S)$ が極大元であることに反する．したがって, $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ の極大元は X とその上の整列順序を組にしたものである．言い換えれば, X 上に整列順序が存在する． ∎

定 理 13.16 選択公理と整列可能定理は同値である．

証 明　定理 13.15 では選択公理から整列可能定理を導いたので, ここでは逆を示す．Ω を空でない集合族で, $\emptyset \notin \Omega$ とする．集合 $\bigcup \Omega$ に整列可能定理を適用して, 適当な順序をいれて整列集合にする．$X \in \Omega$ は整列集合 $\bigcup \Omega$ の空でない部分集合であるから, 最小元 $\min X$ が存在する．これを用いて, 写像 $f : \Omega \longrightarrow \bigcup \Omega$ を $f(X) = \min X$ と定義すれば, $f(X) \in X$ を満たし, f は集合族 Ω の選択関数になる．したがって, 選択公理 (AC2) が成り立つ． ∎

■ **濃度の比較可能性**　第 7–10 章において, 集合の濃度があたかも通常の数のように振舞うことを見てきた．濃度は個数を一般化した概念であるから, 2 つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対して必ず大小が定まること, すなわち, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ が成り立つことが期待される．いよいよ, そのことを証明することができる．

定 理 13.17 (濃度の比較可能定理) 2 つの集合 A, B に対して, A から B への単射または, B から A への単射が存在する. したがって,

$$|A| < |B|, \quad |A| = |B|, \quad |B| < |A|$$

のいずれか 1 つだけが成立する.

証 明 整列可能定理によって, A, B とも整列集合とする. そうすると, (i) A, B は順序同型であるか, (ii) A と B の切片が順序同型であるか, (iii) A の切片と B が順序同型であるか, のいずれかである. 順序同型を与える写像は全単射であるから (i) の場合は A から B への全単射が存在する. (ii) の場合は A から $B(b)$ への全単射が存在するが, それは A から B への単射とみなされる. 同様に, (iii) の場合は B から A への単射が存在する. いずれにせよ, A から B への単射または, B から A への単射が存在する. 後半の主張はもはや明らかである. ■

整列可能定理は選択公理と同値である (定理 13.16) から, 濃度の比較可能定理は選択公理から導かれたと言うことができる. 実は, 逆も成り立ち, 濃度の比較可能定理と選択公理は同値であることが知られている.

■ 選択公理と同値な命題 これまでに出てきた選択公理と同値な命題を列挙しておこう. 他にもいろいろと知られている.

(i) 選択公理 (AC1)–(AC3)
(ii) 全射に対する右逆写像の存在 (定理 11.2)
(iii) ツォルンの補題 (定理 12.23)
(iv) 整列可能定理 (定理 13.15)
(v) 濃度の比較可能定理

(i)–(v) は互いに同値であるとは言うものの, ツォルンの補題 (iii) や濃度の比較可能定理 (v) にはやや込み入った概念が現れる. 全射に関する主張 (ii) も設定がいささか特殊に感じられる. そうすると, 公理としては, カントルやツェルメロが提起したように, 選択関数 (または選択集合) の存在を主張する選択公理 (i), あるいは整列可能性を主張する (iv) が受け入れやすいだろう.

■ 超限帰納法 自然数の配列に基づく数学的帰納法を整列集合に基づく証明法に拡張したものが超限帰納法である. 整列可能定理によってその適用範囲は極めて広い.

定 理 13.18 (超限帰納法) $(X, \preccurlyeq)$ を整列集合とし, $P(x)$ を $x \in X$ を変数とする命題関数とする. もしすべての $x \in X$ に対して条件「$y \prec x$ を満たすすべての $y \in X$ に対して $P(y)$ が成り立てば $P(x)$ も成り立つ」が成り立てば, すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が成り立つ.

証 明 $A = \{x \in X \,|\, P(x) \text{ が偽 }\}$ とおいて, $A = \emptyset$ を示せばよい. そのために, $A \neq \emptyset$ を仮定して矛盾を導けばよい. X は整列集合であるから, $a = \min A$ が存在する. そうすると, $x \prec a$ を満たす任意の $x \in X$ は $x \notin A$ であるから $P(x)$ は成り立ち, 仮定によって $P(a)$ も成り立つ. しかし, $a \in A$ であるから, これは矛盾である. ∎

ふつうの数学的帰納法は超限帰納法の整列集合 X として自然数 $\mathbb{N}$ をとったものである.[3] また, 超限帰納法は証明だけではなく定義にも用いられる. たとえば, 整列集合 X を定義域とする写像 $f(x)$ を $\{f(y) \,|\, y \prec x\}$ を用いて定義する手法がある. これを**再帰的定義** または**帰納的定義** という. ここで正確な主張を述べるのは難しいが, $X = \mathbb{N}$ の場合は第 15.2 節で扱う.

[3]数学的帰納法では, 通常, $\mathbb{N}$ の最小元である 1 に対応する命題を別に扱って「$P(1)$ が成り立つ」ことから始める. 定理 13.18 では見かけ上この条件が落ちているが, $x = 1$ に対応する条件は「$P(1)$ が成り立つ」に他ならない. 実際, $y \prec x$ を満たす y が存在しないからである.