第14章　順序数

整列集合の型として順序数を導入して基本的な性質と演算規則を述べる. 次に, 順序数を公理的集合論の立場から定義して, 特別な順序数として集合の濃度(基数) を導入する.

14.1　順序型としての順序数

一般に, 順序同型な 2 つの順序集合は同じ**順序型**をもつといい, 整列集合の順序型を**順序数**という. つまり, 順序数 α というときは, それに対応する整列集合 $(A, \preccurlyeq)$ を念頭にして, それと順序同型な整列集合を代表するものと理解する. このあたりの取扱いは集合の濃度と同様である. なお, 順序数そのものの定義は第 14.3 節で与える.

■ 順序数の相等　順序数 α, β に対して, 対応する整列集合を A, B として, A と B が順序同型であるとき $\alpha = \beta$ とする. この定義が採用できるのは, 順序数 α, β に対応する整列集合 A, B の選び方に依存しないからである. 実際, 順序数 α, β に対応する別の整列集合を A', B' としよう. A と A' は順序数 α に対応する整列集合であるから, それらは順序同型である. 同様に, B と B' も順序同型である. そうすれば, A と B が順序同型であることと A' と B' が順序同型であることは同値になり, $\alpha = \beta$ の定義において, 整列集合 A, B の選び方に依存しないことがわかる.

同様の議論で, 次の結果が示される.

定 理 14.1　順序数 α, β, γ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\alpha = \alpha$.

(2) $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$.

(3) $\alpha = \beta, \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$.

■ **順序数の大小** 順序数 α, β に対して, 対応する整列集合を A, B として, A が B の切片に順序同型であるとき $\alpha < \beta$ と定義する. 順序数の相等の場合 (上記) と同様に, 順序数 α, β に対応する整列集合 A, B の取り方に依存しない.

定 理 14.2 順序数 α, β に対して

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha$$

のいずれか 1 つが成り立つ.

証 明 順序数 α, β に対応する整列集合を A, B とする. 定理 13.14 によって, A と B は順序同型であるか, A と B の切片が順序同型であるか, A の切片と B が順序同型であるの 3 通りの場合のうち 1 つだけが成り立つ. 定義によって, それぞれが $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ に対応する. ■

2 つの順序数 α, β に対して, いつも通り, $\alpha = \beta$ または $\alpha < \beta$ が成り立つときに $\alpha \leq \beta$ と書く. 次の性質は明らかであろう.

定 理 14.3 順序数 α, β, γ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\alpha \leq \alpha$.
(2) $\alpha \leq \beta,\ \beta \leq \alpha \ \Rightarrow\ \alpha = \beta$.
(3) $\alpha \leq \beta,\ \beta \leq \gamma \ \Rightarrow\ \alpha \leq \gamma$.

■ **有限順序数と超限順序数** 順序数を扱うときは, 1 から始まる自然数 $\mathbb{N}$ よりも 0 を含めた

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

の方が便利である.[1] 通常の順序によって $(\mathbb{N}_0, \leq)$ は整列集合になる. カントルにしたがって, それが定める順序数を ω で表す.

各 $n \in \mathbb{N}_0$ による切片

$$\mathbb{N}_0\langle n\rangle = \{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, x < n\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \tag{14.1}$$

[1] ブルバキ「数学原論」など, 初めから 0 を自然数に含めている文献も多い. ラッセルは, 自然数を 1 ではなく 0 から始める人は, 多少とも数学的教養の高い人であると述べている [27, 第 1 章]. 実際, 濃度や順序数の観点からは 0 を自然数として扱った方が確かに自然ではあるのだが, 本書ではもう 1 つの慣習の方を採用している.

はそれ自身で整列集合 $(\mathbb{N}_0\langle n\rangle, \leq)$ になる．記号の流用であるが, それの定める順序数を n と書く．切片 $\mathbb{N}_0\langle 0\rangle$ は空集合 $\emptyset$ であり, それが定める順序数は 0 となる．一般に, $n \in \mathbb{N}_0$ が定める順序数を**有限順序数**という．有限でない順序数を**超限順序数**という．たとえば, ω は超限順序数である．

問 14.1 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_0$ の元としての相等と順序数としての相等は一致することを示せ.

問 14.2 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_0$ の元としての大小と順序数としての大小は一致することを示せ.

問 14.3 すべての有限順序数 n に対して $n < \omega$ が成り立つことを示せ．次に, ω は最小の超限順序数であることを示せ.

14.2 順序数の演算

■ 順序数の和 順序数 α, β に対して, それらに対応する整列集合を $(A, \preccurlyeq_A)$, $(B, \preccurlyeq_B)$ とする．一般性を失うことなく $A \cap B = \emptyset$ としてよい．和集合 $A \cup B$ に順序 $\preccurlyeq$ を次のように定義する.

$$x \preccurlyeq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i) } x, y \in A,\ x \preccurlyeq_A y, \\ \text{または (ii) } x, y \in B,\ x \preccurlyeq_B y, \\ \text{または (iii) } x \in A,\ y \in B. \end{cases} \tag{14.2}$$

このとき, $(A \cup B, \preccurlyeq)$ が整列集合になることが容易に確かめられる．これを整列集合 A と B の和と言い, 単に $A + B$ と書く．要は, A の後ろに B を接続して得られる整列集合が $A + B$ である．整列集合 $A + B$ の順序型を $\alpha + \beta$ と定義する．この定義は, 順序数 α, β に対応する整列集合の取り方に依存しない．実際, 順序数 α, β に対応する別の整列集合 A', B' をとると, $A' + B'$ と $A + B$ が順序同型になるので問題ないのである.

例 14.4 (有限順序数の和) 有限順序数 m, n の順序数としての和 $m + n$ と $\mathbb{N}_0$ の元としての和は一致することを確かめよう．m, n に対応する整列集合として,

$A = \mathbb{N}_0\langle m\rangle$, $B = \mathbb{N}_0\langle n\rangle$ をとるのが自然ではあるが, $A \cap B = \emptyset$ を満たす必要があるので, $(\mathbb{N}_0, \leq)$ の部分順序集合の $B = \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}$ をとるのがよい. そのとき, 整列集合の和 $A + B$ は $\mathbb{N}_0\langle m+n\rangle$ になるから, 順序数としての和 $m + n$ は $\mathbb{N}_0$ の元としての和に一致する.

例 14.5 有限順序数 n と ω の和を考えてみよう. それぞれに対応する整列集合として, $\mathbb{N}_0$ の部分順序集合

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \qquad B = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

をとろう. 明らかに, $A \cup B = \mathbb{N}_0$, $A \cap B = \emptyset$ が成り立つ. まず, 整列集合の和 $A + B$ は A の後ろに B を接続したものであるから, $(\mathbb{N}_0, \leq)$ と一致することは明らか. したがって,

$$n + \omega = \omega, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{14.3}$$

が成り立つ. 一方, $B + A$ は B の後ろに A を接続したものなので, $A \cup B = \mathbb{N}_0$ の元を

$$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \ldots\ldots \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n-1$$

のように配列してできる整列集合になる. したがって, $n \geq 1$ である限り, $B + A$ と $(\mathbb{N}_0, \leq)$ は順序同型にならない. つまり,

$$\omega + n \neq \omega, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{14.4}$$

である. 特に, (14.3) と (14.4) から

$$\omega + n \neq n + \omega, \qquad n \in \mathbb{N},$$

が得られ, 順序数の和においては交換法則 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ が成り立たないことがわかる.

次に, 順序数の和に関して一般に成り立つ公式を列挙しておこう. 証明は定義から容易である.

定 理 14.6 順序数 α, β, γ に対して次が成り立つ.

(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(2) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(3) $\alpha < \beta \;\Rightarrow\; \gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
(4) $\alpha \le \beta \;\Rightarrow\; \alpha + \gamma \le \beta + \gamma$.

■ **順序数の積** $(A, \preccurlyeq_A)$, $(B, \preccurlyeq_B)$ を整列集合とする．直積集合 $A \times B$ に等号なしの順序関係 $\prec$ が

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \text{(i) } y_1 \prec y_2, \\ \text{または (ii) } y_1 = y_2,\ x_1 \prec x_2, \end{cases} \tag{14.5}$$

によって定義され, 順序集合 $(A \times B, \prec)$ が整列集合になる．これを $A \cdot B$ と書く．整列集合 A, B がそれぞれ A', B' に順序同型であれば, $A \cdot B$ と $A' \cdot B'$ は順序同型である．したがって, 順序数 α, β に対して, それらに対応する整列集合 A, B の積 $A \cdot B$ の型をもって順序数の積 $\alpha\beta$ を定義することができる.[2)]

例 14.7 (有限順序数の積) 自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ を有限順序数とみなす．対応する整列集合として $A = \mathbb{N}_0\langle m\rangle = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $B = \mathbb{N}_0\langle n\rangle = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を取っておく．整列集合の積 $A \cdot B$ の元 $(x, y) \in A \times B$ を (14.5) にしたがって配列すれば,

$$\begin{aligned} &(0,0) \prec (1,0) \prec (2,0) \prec \cdots \prec (m-1,0) \\ &\prec (0,1) \prec (1,1) \prec (2,1) \prec \cdots \prec (m-1,1) \\ &\prec \cdots \\ &\prec (0,n-1) \prec (1,n-1) \prec (2,n-1) \prec \cdots \prec (m-1,n-1) \end{aligned} \tag{14.6}$$

のようになるから, $A \cdot B$ は整列集合 $\mathbb{N}_0\langle mn\rangle$ と同型になる．したがって, 順序数としての積 mn は自然数としての積と一致する.

(14.6) の各行は, A と順序同型な整列集合になっており, $A \cdot B$ はそれらを $n = |B|$ 個接続したものになっている．この見方は一般化できて, 一般に $A \cdot B$ は, A と同型な順序集合を $|B|$ 個用意して, B の配列にしたがって

$$\overbrace{\mid A \mid A \mid \quad \cdots \quad \mid A \mid A \mid \quad \cdots}^{B} \tag{14.7}$$

[2)] ここで与えた $A \cdot B$ の順序は, $A \times B$ 上の辞書式順序の変形である．順序数の積を $A \times B$ に本来の辞書式順序を与えて得られる整列集合の順序型として定義する流儀もある．その流儀に従うと, ここで定義した順序数の積は $\beta\alpha$ となり, しかも順序数の積に関しては交換法則が成り立たないので注意を要する．カントルはこちらの流儀にしたがっていたが, 今では少数派である.

のように接続を繰り返して得られる整列集合といえる.

例 14.8 有限順序数 $n \in \mathbb{N}$ と ω の積を考える. それぞれに対応する整列集合として, $A = \mathbb{N}_0\langle n\rangle = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ と $B = \mathbb{N}_0$ をとることができる. まず, $A \cdot B$ を (14.7) のように表示すると

$$|\,0\ 1\ \ \ldots\ \ n-1\,|\,0\ 1\ \ \ldots\ \ n-1\,|\quad \cdots\quad |\,0\ 1\ \ \ldots\ \ n-1\,|\ \cdots$$

のような配列が得られ, $A \cdot B$ が $\mathbb{N}_0$ と順序同型であることがわかる. したがって,

$$n\omega = \omega, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14.8}$$

が成り立つ. 一方, $B \cdot A$ は $B = \mathbb{N}_0$ を n 個連結した

$$|\,0\ 1\ 2 \ldots\ |\,0\ 1\ 2 \ldots\ |\quad \cdots\quad |\,0\ 1\ 2 \ldots\ | \tag{14.9}$$

のような配列になるから, $n \geq 2$ である限り, $B \cdot A$ と $\mathbb{N}_0$ は順序同型にならない. したがって,

$$\omega n \neq \omega \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \tag{14.10}$$

となる. 特に, (14.8) と (14.10) から, 順序数の積においては交換法則 $\alpha\beta = \beta\alpha$ が成り立たないことがわかる.

定 理 14.9 α を任意の順序数, n を有限順序数とすれば, 次が成り立つ.

$$\alpha n = \overbrace{\alpha + \cdots + \alpha}^{n}. \tag{14.11}$$

証 明 n, α に対応する整列集合を $A = \mathbb{N}_0\langle n\rangle$, B とする. $B = \mathbb{N}_0$ の場合の配列 (14.9) は, 一般の順序数 B で考えても同様であり, 整列集合 $B \cdot A$ は B を n 個連結したものになる. このことから (14.11) が得られる. ∎

順序数の積に関する公式を集めておこう. 証明は定義から容易である.

定 理 14.10 順序数 α, β, γ に対して次が成り立つ.

(1) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(2) $\alpha 0 = 0\alpha = 0$.

(3) $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$.

(4) $\alpha > 0,\ \beta < \gamma \ \Rightarrow\ \alpha\beta < \alpha\gamma$.
(5) $\beta \leq \gamma \ \Rightarrow\ \beta\alpha \leq \gamma\alpha$.
(6) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

■ **順序数のべき** 順序数 α, β に対して, それらに対応する整列集合を $(A, \preccurlyeq_A)$, $(B, \preccurlyeq_B)$ とする. これまでに, 和集合 $A \cup B$ と積集合 $A \times B$ に適当な整列順序を導入することで, 順序数の和と積を定義した. この類推で, 写像の集合 $\mathrm{Map}(B, A) = A^B$ にうまく整列順序を導入して順序数のべきを定義したいところであるが, べき法則や順序数の順序の観点から不都合がある. そこで, $\mathrm{Map}(B, A)$ の部分集合を扱う.

まず, $\min A = y_0$ とする. 写像 $f : B \longrightarrow A$ であって, 有限個の $x \in B$ を除いて $f(x) = y_0$ となるもの全体を C とする. 相異なる $f, g \in C$ に対して, $\{x \in B \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ は空でない有限集合であるから, 最大元 b が存在する. これを利用して, $f(b) \prec_A g(b)$ のときに $f \prec g$ とおいて, C 上に 2 項関係 $\prec$ を定義する. これが C 上の等号なしの順序関係になることは容易にわかる. さらに, $(C, \prec)$ は整列集合になることが示される.[3] 整列集合 C の順序型をもって順序数 α の β 乗を定義して, それを α^β と書く.

例 14.11 (有限順序数のべき) 有限順序数 m, n に対応して, 整列集合 $A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を取る. ここでは, A が有限集合であるから, 上の整列集合 C は写像の集合 $\mathrm{Map}(B, A)$ にしかるべき順序を定義したものである. $f \in \mathrm{Map}(B, A)$ とその像による有限列 $(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))$ を対応させることで, $\mathrm{Map}(B, A)$ と $A \times A \times \cdots \times A = A^n$ を同一視すれば, C は A^n にしかるべき順序を入れたものと順序同型になる. さて, A^n 上に定義される順序であるが, C に定義された順序を見直せば,

$$f = (f(0), f(1), \ldots, f(n-1)), \qquad g = (g(0), g(1), \ldots, g(n-1))$$

に対して, $f(n-1) < g(n-1)$ のとき, または $f(n-1) = g(n-1)$, $f(n-2) < g(n-2)$ のとき, または $f(n-1) = g(n-1)$, $f(n-2) = g(n-2)$, $f(n-3) < g(n-3)$ のときのように, f と g の成分を右から見比べて初めて違いが現れたところを用いて $f \prec g$ のように定めている. これは直積集合 A^n に整列順序の積として導入した順序に他ならないので, C は整列集合の積 $A \cdot A \cdots A$

[3] 証明は難しくはないが長くなるので省略する. たとえば, 赤 [1] を見よ.

と順序同型である．したがって, 順序数のべき m^n は順序数の積 $mm\cdots m$ に一致する．一方, 有限順序数の積は自然数としての積と一致し, 後者の意味で $mm\cdots m = m^n$ であるから, 順序数のべき m^n は自然数のべきに一致する．

順序数のべきに関する公式を集めておこう．定義にもどって証明される．

定 理 14.12 α を任意の順序数, n を有限順序数とすれば, 次が成り立つ．

$$\alpha^n = \overbrace{\alpha\alpha\cdots\alpha}^{n}.$$

定 理 14.13 順序数 α, β, γ に対して次が成り立つ．

(1) $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$.
(2) $\alpha > 0 \;\Rightarrow\; 0^\alpha = 0$.
(3) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.
(4) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
(5) $\alpha > 1, \beta < \gamma \;\Rightarrow\; \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
(6) $\beta \le \gamma \;\Rightarrow\; \beta^\alpha \le \gamma^\alpha$.

問 14.4 順序数 α, β が $\alpha \le \beta$ を満たせば, $\alpha + \gamma = \beta$ となる順序数 γ が一意的に存在することを示せ．

問 14.5 順序数 α, β, γ に対して, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ は一般には成り立たない．例を示せ．

問 14.6 順序数 α, β, γ に対して, $(\beta\gamma)^\alpha = \beta^\alpha\gamma^\alpha$ は一般には成り立たない．例を示せ．

14.3　順序数の定義

前節までに, 順序同型な整列集合に共通な性質 (順序型) として順序数を導入したが, 順序数そのものは定義していない．本節では, いよいよ順序数そのものを特別な整列集合として定義する．実際, 順序数の理論は公理的集合論の枠組みで

展開するのが正当であるが, ここでは, 第 3.3 節に述べた集合の公理 (S1)–(S10) を参照しながら, 順序数の定義を理解することを目標とする.[4)]

■ **推移的な集合**　集合 A は, そのすべての元が A の部分集合になっているとき, すなわち,

$$a \in A \ \Rightarrow \ a \subset A \tag{14.12}$$

が成り立つとき, **推移的**であるという. 一見, 不審感を覚えるような定義である. 公理的集合論では扱う対象はすべて集合であった. つまり, 集合 A の元はすべて集合であり, A は集合族であると認識するとよい. なお, 条件 (14.12) は,

$$a \in A,\ b \in a \ \Rightarrow \ b \in A \tag{14.13}$$

と同じことである. こちらを見れば, 推移的という理由が明らかになる.

例をいくつか示そう. まず, 空集合 $\emptyset$ が (14.12) を満たすのは自明の論理である. 次に, $A = \{\emptyset\}$ を考えてみよう. A の元は空集合 $\emptyset$ であり, それは確かに A の部分集合でもある. つまり, $A = \{\emptyset\}$ は推移的な集合である. さらに, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ や $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ も推移的な集合である. 一方, $\{\{\emptyset\}\}$ は推移的ではない.

■ **順序数の定義**　次の 2 条件を満たす集合 α を**順序数**という.

(i) α は推移的である.

(ii) α は帰属関係 $\in$ に関して整列集合である.

条件 (ii) が簡潔過ぎて少しわかりにくい. まず, 帰属関係と呼ばれる 2 項関係 $\in$ が集合 α 上に等号なしの順序関係を与え, それが全順序になることが要請されている. つまり, $x, y, z \in \alpha$ に対して推移律

$$x \in y,\ y \in z \ \Rightarrow \ x \in z$$

が成り立ち, さらに, 任意の $x, y \in \alpha$ は比較可能, つまり

$$x \in y, \qquad x = y, \qquad y \in x, \tag{14.14}$$

のいずれか 1 つが成り立つ. さらに, 全順序集合 $(\alpha, \in)$ が整列集合になるというのが条件 (ii) の内容である.[5)]

[4)] 順序数の理論構成については, 田中 [12, 第 I 部] などが簡潔で読みやすい.

[5)] ここに述べた順序数の定義はフォン・ノイマンによる [56] (1923). 基礎の公理 (S9) によって, (i) の下では, $(\alpha, \in)$ が全順序集合であればそれは整列集合になる. しかしながら, 基礎の公理を仮定せずに順序数を定義する立場もあるので, ここでは $(\alpha, \in)$ が整列集合になることを条件に加えた.

例 14.14 空集合に帰属関係を合わせた $(\emptyset, \in)$ は順序数である.[6] 推移的な集合の例として述べた $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ も順序数である. 実際,

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

のように確かに整列している.

定 理 14.15 順序数の元はすべて順序数である.

証 明 α を順序数として, その元 $x \in \alpha$ を考える. まず, x が推移的であることを示す. そのためには, $y \in x$, $z \in y$ から $z \in x$ を導けばよい. まず, $y \in x$ と $x \in \alpha$ において, α が推移的であるから, $y \in \alpha$ となる. 同様に, $z \in y$ と $y \in \alpha$ から $z \in \alpha$ となる. そうすると, $x, y, z \in \alpha$ で $z \in y$, $y \in x$ となっている. 特に, $\in$ は α 上の等号なしの順序関係であるから, 推移律によって $z \in x$ が成り立つ. 次に, $(x, \in)$ が整列集合であることを示す. α は推移的なので, $x \in \alpha$ から $x \subset \alpha$ がわかる. そうすると, $(x, \in)$ は整列集合 $(\alpha, \in)$ の部分順序集合になり, $(x, \in)$ も整列集合である. ∎

補 題 14.16 α を順序数, $\beta \in \alpha$ とする. 整列集合 $(\alpha, \in)$ の切片 $\alpha\langle\beta\rangle$ に対して, 次が成り立つ.

$$\alpha\langle\beta\rangle = \beta. \tag{14.15}$$

証 明 定義によって, $\alpha\langle\beta\rangle = \{x \in \alpha \mid x \in \beta\} = \alpha \cap \beta$ である. 一方, α は推移的なので, $\beta \in \alpha$ から $\beta \subset \alpha$ がわかる. したがって, (14.15) が成り立つ. ∎

補 題 14.17 順序数 α は $\alpha \notin \alpha$ を満たす.

証 明 $\alpha \in \alpha$ とすると, α 自身が全順序集合 $(\alpha, \in)$ の元である. しかし, $\in$ は等号なしの順序関係であるから $\alpha \in \alpha$ は成り立たない.[7] ∎

補 題 14.18 α が順序数で $\alpha \neq \emptyset$ ならば $\emptyset \in \alpha$ である.

[6] 空集合の公理 (S2) によって, 空集合 $\emptyset$ の存在が保証されている.

[7] 基礎の公理 (S9) によって, 一般の集合 x, y に対しては, 関係 (14.14) のうち高々1 つが成り立つ. したがって, 必ず $x \notin x$ である (定理 3.15).

証 明 $(\alpha, \in)$ が整列集合なので $a = \min \alpha \in \alpha$ が存在する．$a \neq \emptyset$ ならば, $b \in a$ となる b が存在する．α は推移的であるから $b \in \alpha$ が得られるが, $b \in a$ なので a が α の最小元であることに反する．したがって, $a = \emptyset$ であって, $\emptyset \in \alpha$ がわかる． ∎

補 題 14.19 2 つの順序数 α, β に対して, 次の 2 つの条件は同値である．

(i) $\alpha \in \beta$.

(ii) $\alpha \subsetneq \beta$.

このとき, α は α による β の切片である: $\alpha = \beta\langle\alpha\rangle$.

証 明 (i) $\Rightarrow$ (ii). β は推移的なので, $\alpha \in \beta$ ならば $\alpha \subset \beta$ である．また, 補題 14.17 によって, $\alpha \neq \beta$ がわかる．さらに, 補題 14.16 によって, $\alpha = \beta\langle\alpha\rangle$ が成り立つ．

(ii) $\Rightarrow$ (i). $\beta = \emptyset$ なら主張は明らかなので, $\beta \neq \emptyset$ とする．仮定から $\beta \backslash \alpha$ は整列集合 $(\beta, \in)$ の空でない部分集合であるから, 最小元 γ が存在する．$\gamma \in \beta$ であるから $\gamma = \alpha$ が示されれば, $\alpha \in \beta$ となる．

まず, $\gamma \subset \alpha$ を示そう．実際, $x \in \gamma$ とすると, $\gamma \in \beta$ と合わせて, $x \in \beta$ となる．もし $x \notin \alpha$ であれば, $\gamma = \min \beta \backslash \alpha$ であることから．$x = \gamma$ または $\gamma \in x$ である．しかし, これらの条件は $x \in \gamma$ に矛盾する．したがって, $x \in \alpha$ であり, $\gamma \subset \alpha$ が示された．

次に, $\alpha \subset \gamma$ を示そう．$x \in \alpha$ とする．仮定によって $x \in \beta$ となるから, $\gamma \in \beta$ と比較可能である．もし, $\gamma \in x$ であれば, $x \in \alpha$ と合わせて $\gamma \in \alpha$ が得られる．もし, $\gamma = x$ であれば, $x \in \alpha$ から直ちに $\gamma \in \alpha$ が得られる．しかし, $\gamma \in \alpha$ は γ の取り方に反するから, $x \in \gamma$ であり, $\alpha \subset \gamma$ が成り立つ． ∎

■ 後続順序数 まず, 便利な記号を準備する．集合 x に対して

$$x^+ = x \cup \{x\} \tag{14.16}$$

とおけば, 対の公理 (S3) と和集合の公理 (S4) によって x^+ も集合になる．[8)]

補 題 14.20 集合 x, y が $x \subset y \subset x^+$ を満たせば, $y = x$ または $y = x^+$ が成り立つ．

[8)] 基礎の公理 (S9) を用いれば, すべての集合 x に対して $x \subsetneq x^+$ も容易に示される (定理 3.15).

証 明　$x \in y$ または $x \notin y$ で場合分けをする．まず, $x \in y$ であれば, $x \subset y$ と合わせて $x^+ = x \cup \{x\} \subset y$ が得られる．初めの仮定 $y \subset x^+$ と合わせて $y = x^+$ となる．次に, $x \notin y$ とする．このとき, $y \subset x \cup \{x\}$ から $y \subset x$ となる．初めの仮定 $x \subset y$ と合わせて $y = x$ が得られる． ∎

定 理 14.21 α が順序数であれば, $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数である．さらに, $\alpha \in \alpha^+$ かつ $\alpha \neq \alpha^+$ である．

証 明　α^+ が推移的であることを示すために, $x \in \alpha^+$, $y \in x$ から $y \in \alpha^+$ を導く．まず, $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ から $x \in \alpha$ または $x = \alpha$ である．$x \in \alpha$ のときは, α が推移的であることから $y \in \alpha$ となる．$x = \alpha$ のときは, $y \in x = \alpha$ となり, いずれにせよ $y \in \alpha$ である．一方, $\alpha \subset \alpha^+$ なので $y \in \alpha^+$ となる．

次に, $(\alpha^+, \in)$ が整列集合であることを示す．実際, α の任意の元 x は $x \in \alpha$ を満たすので, α^+ は順序集合 α にそのどの元よりも大きな元 α を付け加えたものになっている．したがって, $(\alpha^+, \in)$ は整列集合である．

こうして, α^+ も順序数である．定義から $\alpha \in \alpha^+$ は明らかである．また, α, α^+ ともに順序数であるから, 補題 14.19 によって $\alpha \neq \alpha^+$ がわかる． ∎

補 題 14.22 α を順序数とすれば, $x \in \alpha$ に対して $x^+ = \alpha$ または $x^+ \in \alpha$ が成り立つ．

証 明　α を順序数として, $x \in \alpha$ とする．α は推移的であるから, $x \subset \alpha$ である．したがって, $x \in \alpha$ と合わせて $x^+ = x \cup \{x\} \subset \alpha$ が得られる．一方, 定理 14.15 によって, x も順序数であり, 定理 14.21 から x^+ も順序数である．そうすると, $x^+ \subset \alpha$ を満たす 2 つの順序数に補題 14.19 を適用して, $x^+ = \alpha$ または $x^+ \in \alpha$ がわかる． ∎

一般に, 整列集合において, 最大元以外の元に対して後続元が一意的に存在することを思い出しておこう (定理 13.6).

定 理 14.23 α を順序数, $x \in \alpha$ とする．もし x が整列集合 $(\alpha, \in)$ の最大元でなければ, x の後続元が一意的に存在し, それは x^+ で与えられる．もし x が最大元であれば, $x^+ = \alpha$ となる．

証 明 補題 14.22 によって, $x^+ \in \alpha$ または $x^+ = \alpha$ である. まず, $x^+ \in \alpha$ とする. $y \in \alpha$ が $x \in y$, $y \in x^+$ を満たしているとする. 補題 14.19 によって, $x \subsetneq y \subsetneq x^+$ となるが, 一般にそのような集合 y は存在しない (補題 14.20). したがって, x^+ は整列集合 $(\alpha, \in)$ において x の後続元である. この場合は, もちろん x は $(\alpha, \in)$ の最大元ではない.

次に, $x^+ = \alpha$ とする. 定理の主張のためには, x が整列集合 $(\alpha, \in)$ の最大元であることを示せばよい. そのためには $y \in \alpha$ で $x \in y$ を満たすものが存在したと仮定して矛盾を導けばよい. x, y ともに順序数で $x \in y$ を満たすので $x \subset y$ が成り立つ. したがって, $x^+ = x \cup \{x\} \subset y$ となる. x^+ も順序数なので, 補題 14.19 によって $x^+ = y$ または $x^+ \in y$ が成り立つ. 仮定より $x^+ = \alpha$ なので $\alpha = y$ または $\alpha \in y$ となり, いずれにせよ y の取り方 $y \in \alpha$ に反する. ■

定理 14.21 と定理 14.23 から, 順序数 α に対して α^+ を α の**後続順序数**と呼ぶことにする. 0 は最小の順序数であるから, いかなる順序数の後続順序数にもならない. 0 以外のそのような順序数を**極限順序数**という. たとえば, ω は極限順序数である.

■ 順序数の比較可能性 任意の 2 つの順序数は比較可能であることを示そう.

補 題 14.24 2 つの順序数 α, β に対して $\alpha \subset \beta$ または $\beta \subset \alpha$ が成り立つ.

証 明 背理法による. 結論を否定すると, $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$ かつ $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$ となる. 定義から α, β が順序数であれば $\alpha \cap \beta$ も順序数であるから, 補題 14.19 によって, $\alpha \cap \beta \in \alpha$ かつ $\alpha \cap \beta \in \beta$ となる. したがって, $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$ が得られて補題 14.17 に反する. ■

定 理 14.25 2 つの順序数 α, β が順序同型なら $\alpha = \beta$ である.

証 明 対偶を示す. $\alpha \neq \beta$ と仮定すると, 補題 14.24 から $\alpha \subsetneq \beta$ または $\beta \subsetneq \alpha$ が成り立つ. 同じことなので, $\alpha \subsetneq \beta$ の場合を考えよう. 補題 14.19 によって α は β の切片になる. 一般に, 整列集合はその切片と順序同型にならないので (定理 13.10), α と β は順序同型にならない. ■

定 理 14.26 2 つの順序数 α, β に対して,

$$\alpha \in \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta \in \alpha$$

のいずれか 1 つが成り立つ.

証 明 整列集合に関する基本定理 13.14 によって, (i) α と β の切片が順序同型, (ii) α と β が順序同型, (iii) β と α の切片が順序同型, のいずれか 1 つが成り立つ. (i) であれば, ある $\gamma \in \beta$ が存在して α と $\beta\langle\gamma\rangle$ が順序同型になる. 定理 14.15 によって γ 自身も順序数であり, 補題 14.16 によって, $\beta\langle\gamma\rangle = \gamma$ が成り立つ. したがって, 2 つの順序数 α, γ が順序同型になり, 定理 14.25 によって $\alpha = \gamma$ が得られて $\alpha \in \beta$ がわかる. (ii), (iii) も同様である. ∎

以後, 順序数 α, β の順序を

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$$

によって定義する. 定理 14.26 によって, 2 つの順序数 α, β は,

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha$$

のいずれか 1 つを満たす. 順序数の全体は集合ではないので, 厳密な意味で $<$ は順序関係ではないが, それに準じた扱いをする. 第 14.1 節では, 整列集合の比較によって $\alpha < \beta$ を導入したが, ここに至って順序数そのものの大小として再定式化されたのである.

定 理 14.27 (最小の順序数) 順序数 $(\emptyset, \in)$ は最小の順序数である. これをしばしば 0 と書く.

証 明 α を任意の順序数とする. 定理 14.26 によって, $\alpha \in \emptyset$, $\alpha = \emptyset$, $\emptyset \in \alpha$ のいずれか 1 つが成り立つ. 空集合の定義から, $\alpha \in \emptyset$ は成り立たないので, 後の 2 つが成り立つ. そのことは, $\emptyset$ が最小の順序数であることを意味する. ∎

問 14.7 順序数を元とする空でない集合 A には最小の順序数が存在することを示せ.

問 14.8 順序数を元とする集合 A に対して $\bigcup A$ も順序数になることを示せ.

■ 整列集合と順序数 第 14.1 節では順序同型な整列集合の順序型として順序数を導入した. 一方, 本節では特別な整列集合として順序数を導入したが, 次の定理によって, それは順序型としての順序数をすべてカバーすることになる.

定 理 14.28 すべての整列集合に対して, それと順序同型な順序数が一意的に存在する.

証 明 定理 14.25 によって, そのような順序数が存在すれば一意的であるから存在を示せばよい. $(X, \preccurlyeq)$ を任意の整列集合として, X を定義域とする写像 π を

$$\pi(x) = \{\pi(y) \,|\, y \in X,\ y \prec x\}, \qquad x \in X,$$

によって定義し, その像集合を $\mathrm{ord}\,(X)$ と書く.[9]

$\mathrm{ord}\,(X)$ が推移的であることを示そう. 実際, $\alpha \in \mathrm{ord}\,(X)$, $\beta \in \alpha$ とする. 前者から, ある $x \in X$ が存在して $\alpha = \pi(x)$ となり, 後者と合わせて, ある $y \in X$ が存在して $\beta = \pi(y)$ となる. そうすると, $\beta \in \mathrm{ord}\,(X)$ となり, $\mathrm{ord}\,(X)$ が推移的であることがわかる.

次に, $(\mathrm{ord}\,(X), \in)$ が整列集合であることを示す. まず, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ord}\,(X)$ が $\alpha \in \beta$, $\beta \in \gamma$ を満たせば, $\alpha \in \gamma$ であることは写像 π の定義からすぐわかり, $(\mathrm{ord}\,(X), \in)$ は順序集合になる. さらに全順序であることも写像 π の定義から明らかである. さて, $S \subset \mathrm{ord}\,(X)$, $S \neq \emptyset$, とすれば, ある $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, が存在して $S = \pi(Y)$ となる. X は整列集合であるから, $a = \min Y$ が存在する. そうすれば, $\pi(a) = \min S$ がわかる.

こうして, $(\mathrm{ord}\,(X), \in)$ が順序数であることが示された. 最後に, $\pi : X \longrightarrow \mathrm{ord}\,(X)$ が順序同型であることを示す. まず, $x \prec y$ ならば $\pi(x) \in \pi(y)$ は明らかであるから, π は順序を保つ単射である. 定義から全射は明らかなので, π は順序同型である. ∎

例 14.29 整列集合 X に対して, $\mathrm{ord}\,(X) = \{\pi(x) \,|\, x \in X\}$ を少し具体的に考えてみよう. まず,

$$\mathrm{ord}\,(\emptyset) = \emptyset \tag{14.17}$$

は定義から明らかである. 次に, X がただ 1 つの元からなる場合, たとえば, $X = \{2\}$ ではどうか. 定義によって $\pi(2) = \emptyset$ であるから,

$$\mathrm{ord}\,(\{2\}) = \{\emptyset\} \tag{14.18}$$

[9] 直感的には次のようである. まず, $a = \min X$ に対しては, $y \prec a$ を満たす $y \in X$ は存在しないので, $\pi(a) = \emptyset$ となる. 次に, $y \prec x$ を満たすすべての $y \in X$ に対して $\pi(y)$ が定義されたとして, それらをすべて集めた集合として $\pi(x)$ を定義する. この再帰的な定義の正当性は超限帰納法に帰着し, さらに π の像が集合になることが証明される. ここでは, 詳細に立ち入らない.

となる．では, $X = \{2, 4\}$ (ただし $2 < 4$) ではどうか．定義によって

$$\pi(2) = \emptyset,$$
$$\pi(4) = \{\pi(x) \mid x \in X, x < 4\} = \{\pi(2)\} = \{\emptyset\},$$

であるから,

$$\mathrm{ord}\,(\{2, 4\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \tag{14.19}$$

となる．同様に, $X = \{2, 4, 7\}$ (ただし $2 < 4 < 7$) に対して,

$$\pi(2) = \emptyset,$$
$$\pi(4) = \{\pi(x) \mid x \in X, x < 4\} = \{\pi(2)\} = \{\emptyset\},$$
$$\pi(7) = \{\pi(x) \mid x \in X, x < 7\} = \{\pi(2), \pi(4)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

であるから,

$$\mathrm{ord}\,(\{2, 4, 7\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \tag{14.20}$$

となる．このように, $\mathrm{ord}\,(X)$ は整列集合 X に対して, その構成要素によらない標準的な整列集合を対応させている．(14.17)–(14.20) の右辺の順序数は $0, 1, 2, 3$ と書かれ, 自然数 (および 0) の定義になる (第 15 章).

■ **濃度の定義**　2 つの集合 A, B の間に全単射が存在するときに, $|A| = |B|$ と書いて, 集合 A, B の濃度が等しいという (第 7.1 節)．これまでに濃度が数のように振舞うことは見てきたが, 集合の濃度そのものの定義は与えてこなかった.

ここに至って, 集合の濃度を定義することができる．集合 A に対して, A と濃度が等しい順序数の中で最小のものを A の**濃度**と呼び, あらためて $|A|$ と書くことにする．そうすると, 集合の濃度も順序数と同様に特別な集合として定義される．ただし, すべての集合に対して濃度が定義されることを保証するためには, 整列可能定理が必要である.[10] 集合の濃度になるような順序数を**基数**と呼ぶ．たとえば, 有限順序数は基数である．また, ω も基数であるが, $\omega + 1$ は基数ではない.

■ **ブラリ・フォルティのパラドックス**　集合論が現れて間もなく, すべての順序数の集まりを素朴に集合として扱うと矛盾が出ることが示された．これがブ

[10] 整列可能定理は選択公理と同値であることを思い出しておこう (第 13.3 節)．選択公理を仮定せずに濃度を導入する研究もある.

ラリ・フォルティのパラドックスである.[11] 順序数という明確なものの集まりが集合として扱えないということで, ラッセルのパラドックスとともに数学の危機の一因となったのである.

本節の議論を踏まえれば, 順序数の全体 Ω が集合にならないことが簡単に導ける. Ω が集合であれば, $\tilde{\Omega} = \bigcup \Omega$ が定義され, 順序数になることがわかる (問 14.7). 任意の $\alpha \in \Omega$ は $\alpha \subset \tilde{\Omega}$ であり, $\alpha, \tilde{\Omega}$ ともに順序数であるから, $\alpha \in \tilde{\Omega}$ または, $\alpha = \tilde{\Omega}$ が成り立つ. したがって, $\tilde{\Omega}$ は最大の順序数である. 一方, $\tilde{\Omega}^+$ も順序数であり, その定義から $\tilde{\Omega} \in \tilde{\Omega}^+$ となる. これは, $\tilde{\Omega}$ の最大性に反する.

こうして, 公理的集合論において, 順序数全体の集合は存在しないという結論が得られた. 要は, この結論を受け入れれば済むことであって, 特に困ったことにはならないのである. 順序数全体が集合であって欲しいという願いとは別にパラドックスは解消しているのである.

[11] Cesare Burali-Forti (1861–1931) イタリアの数学者. このパラドックスは 1897 年の論文 [31] に由来するというのが通説である. これに対する歴史的考察が興味深い [49]. ブラリ・フォルティはペアノやカントルの影響のもとに, 確かに整列集合に関する研究を行っていたが, この矛盾に関して言及した論文はない. 彼の議論から矛盾 (パラドックス) が出ることを明確に指摘したのはラッセルで, 1903 年の著書 The Principles of Mathematics の中に初めて現れたと結論付けている.