

第15章 自然数

これまでの議論では、自然数については既知として、暗黙のうちにその性質を利用してきた。本章では、自然数そのものを集合と写像を用いて理解する。まず、自然数のもつ根源的な性質（ペアノの公理）を取り出して、自然数の算法や大小に関する法則を導く。次いで、集合の公理を用いて自然数を構成的に定義する。

15.1 ペアノの公理

自然数 $\mathbb{N}$ は単に個別の自然数の集合というだけではなく、加法や乗法による代数構造と大小から決まる順序構造に由来する様々な性質をもつ。そのような豊かな構造や性質の本質を追究して、最も根源的な性質を「自然数の公理」として提示し、他のすべての性質を公理から論理的に導いて1つの体系をつくることが重要である。そのような立場はユークリッドの原論以来の数学の伝統であり、ペアノ¹⁾はその立場から自然数の体系化に成功した。

■ ペアノの公理 集合 X に対する次の5条件をペアノの公理という。²⁾

- (P1) 元 $e \in X$ が与えられている。
- (P2) 写像 $\varphi: X \rightarrow X$ が与えられている（これを後継写像という）。
- (P3) φ は単射である。つまり、 $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$ 。
- (P4) $e \notin \varphi(X)$ 。つまり、すべての $x \in X$ に対して $\varphi(x) \neq e$ 。
- (P5) 部分集合 $S \subset X$ が次の2条件を満たせば $S = X$ である。
 (i) $e \in S$, (ii) $x \in S \Rightarrow \varphi(x) \in S$ 。

¹⁾Giuseppe Peano (1858–1932). イタリアの数学者。この公理系の原型は1889年の論文 [50] に現れ、1891年の論文 [51] において今日よく知られている形で5つの公理が確立した。ただし、ペアノ自身が引用しているように、デデキントも [38] (1887) の中でほぼ同等の形で自然数を公理化している。ペアノの論文の和訳は [26]、デデキントのものは [25] で見ることができる。

²⁾ここでは、ペアノの原論文にしたがって番号を付けたが、文献によっては (P3) と (P4) が入れ替わっているものもある。数学的帰納法の原理を与える (P5) は、「ペアノの第5公理」とも呼ばれ、番号は不動のようである。

このとき、集合 X に e と φ を合わせた組 (X, e, φ) をペアノ系と呼ぶ。

素朴に理解される自然数 $\mathbb{N}$ は、 $e = 1$, $\varphi(x) = x + 1$ として、ペアノ系 $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ を与える。特に、公理 (P5) は数学的帰納法の言い換えであることに注意しよう。

ペアノの功績は、自然数の体系がペアノ系 (X, e, φ) 、つまり、自然数、最初の自然数、次の自然数の 3 つ基本概念に帰着されることを示したところにある。以下では、ペアノの公理だけを用いて自然数の演算や順序を導き、ペアノの公理 (P1)–(P5) が「自然数の公理」と呼ぶのにふさわしいことを示す。

議論に入る前に、ペアノの公理に関して 2 つの注意をする。まず、ペアノ系はたくさん存在する。 $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ から派生するものとして、 $X = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $e = 0$, $\varphi(x) = x + 1$ とすれば、 $(\mathbb{N}_0, 0, \varphi)$ もペアノ系である。あるいは、 $X = \{18, 20, 22, \dots\}$, $e = 18$, $\varphi(x) = x + 2$ とすれば、 (X, e, φ) もペアノ系になる。ペアノ系というだけでは順序は導入されていないのだが、容易に予想されるように、後継写像から順序が定まり、すべてのペアノ系は互いに順序同型になる（詳しくは第 15.2 節で扱う）。その意味で、 $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ あるいは $(\mathbb{N}_0, 0, \varphi)$ は唯一のペアノ系となり、自然数が特徴付けられるのである。

しかし、そもそもペアノ系は存在するのかという疑問がある。ペアノ系の例として $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ をあげたが、集合 $\mathbb{N}$ の定義はまだない。そこでは、暗黙の了解の下に自然数はペアノの公理を満たすと主張したに過ぎず、これから自然数を定義しようとする立場からは認められない。一般に、公理はあくまで議論の前提であって、そこから得られる様々な結果を積み上げても、公理を満たすもの（今の場合はペアノ系）が存在することの証明にはならない。³⁾ それどころか、もし公理を満たすものが存在しなければ、その公理から導かれた結果はすべて意味を失う。さいわいペアノ系に関してはそのような心配はない。集合の公理を使ってペアノ系を構成することができるからである（第 15.4 節）。結果として、(P1)–(P5) を満たす数学的な対象は唯一存在し、それが自然数になる。

■ ペアノ系の簡単な性質

定理 15.1 (X, e, φ) をペアノ系とする。任意の $y \in X$, $y \neq e$ 、に対して、 $\varphi(x) = y$ を満たす $x \in X$ が一意的に存在する。（この x を y の前者という。）

証明 前者が存在すれば一意であることは (P3) から明らか。 X の部分集合 $S = \{y \in X \mid y \text{ には前者が存在する} \} \cup \{e\}$ を考えよう。まず、 $e \in S$ は明

³⁾ もし互いに矛盾する結果が得られれば、公理を満たすものが存在しないことの証明にはなるが。

15.2. ペアノの公理の完全性

221

らか. $y \in S$ とすると, $\varphi(y)$ には y という前者が存在する (前者の定義) から $\varphi(y) \in S$ である. そうすると, (P5) によって, $S = X$ である. これは, $y \in X$ で $y \neq e$ を満たすものに対して, 前者が存在することを意味する. ■

定理 15.2 (X, e, φ) をペアノ系とする. このとき, すべての $x \in X$ に対して $\varphi(x) \neq x$ が成り立つ.

証明 X の部分集合を $S = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq x\}$ で定義する. まず, (P4) によって, すべての x に対して $\varphi(x) \neq e$ であるから, もちろん $x = e$ として $\varphi(e) \neq e$ となる. これは $e \in S$ を意味する. 次に, $x \in S$ とする. 定義から $\varphi(x) \neq x$ である. (P3) によって φ は単射であるから $\varphi(\varphi(x)) \neq \varphi(x)$ である. これは $\varphi(x) \in S$ を示す. こうして, S は (P5) の 2 条件を満たすので, $S = X$ である. これが示したかったことである. ■

問 15.1 (X, e, φ) をペアノ系とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$X = \{e\} \cup \varphi(X), \quad \{e\} \cap \varphi(X) = \emptyset.$$

問 15.2 (X, e, φ) がペアノ系であれば, X はデデキント無限集合であることを示せ. (無限集合の定義には有限集合が必要で, 有限集合の定義には自然数が必要である. ここでは, 無限集合ではなくデデキント無限集合を扱う.)

15.2 ペアノの公理の完全性

(X, e, φ) をペアノ系とする. e から始めて, 後継写像 φ を次々に適用することで, X の元の列

$$e \xrightarrow{\varphi} \varphi(e) \xrightarrow{\varphi} \bullet \xrightarrow{\varphi} \bullet \cdots \cdots \bullet \xrightarrow{\varphi} \bullet \cdots \quad (15.1)$$

が得られる. 公理 (P5) と定理 15.2 によって, X の元はすべて (15.1) の中に 1 回だけ現れる. また, (P4) によって, φ を繰り返し適用しても, その結果が e に戻ることはなく, また, (P3) によって, すでに現れている e 以外の元に戻ることもない. このことを念頭におきながら議論を続けよう.

■ 写像の帰納的定義 空でない集合 A と写像 $F : A \rightarrow A$ が与えられたとき, $a \in A$ に写像 F を次々に適用すると, A の元の列

$$a \xrightarrow{F} F(a) \xrightarrow{F} \bullet \xrightarrow{F} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{F} \bullet \cdots \quad (15.2)$$

が得られる. そこで, (15.1) と (15.2) を重ね合わせて, X から A への写像 f を

$$\begin{array}{ccccccc} e & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(e) & \xrightarrow{\varphi} & \bullet & \xrightarrow{\varphi} & \bullet \cdots \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow{F} & F(a) & \xrightarrow{F} & \bullet & \xrightarrow{F} & \bullet \cdots \end{array}$$

のように定義したい. まず, $f(e) = a$ であり, $f(x)$ が定義できれば, x の次の元 $\varphi(x)$ に対しては $f(\varphi(x)) = F(f(x))$ となる. つまり, $f(x)$ の定義にあたって, X の元を (15.1) のように並べておいて, 左から順に定義できたものを利用してしながら定義するという形式になっている. したがって, このような方法で写像 $f : X \rightarrow A$ を定義したことになるのかは証明を要することなのである.

定理 15.3 (写像の帰納的定義) (X, e, φ) をペアノ系とする. A を空でない集合, $F : A \rightarrow A$ を任意の写像, $a \in A$ を任意の元とする. このとき, 次の性質をもつ写像 $f : X \rightarrow A$ が一意に存在する.

$$f(e) = a, \quad f(\varphi(x)) = F(f(x)), \quad x \in X. \quad (15.3)$$

なお, (15.3) の後半は $f \circ \varphi = F \circ f$ を意味し, 次の図式で見るのが便利である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{F} & A \end{array}$$

証明 一意性は容易である. f, g を写像 $X \rightarrow A$ で,

$$\begin{aligned} f(e) &= a, & f(\varphi(x)) &= F(f(x)), & x \in X, \\ g(e) &= a, & g(\varphi(x)) &= F(g(x)), & x \in X, \end{aligned}$$

15.2. ペアノの公理の完全性

223

を満たすものとする. X の部分集合 $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ を考えよう. $f(e) = g(e) = a$ から $e \in S$ は明らか. 次に, $x \in S$ とすると, $f(x) = g(x)$ であるから両辺に F を作用させて,

$$f(\varphi(x)) = F(f(x)) = F(g(x)) = g(\varphi(x))$$

が得られる. これは $\varphi(x) \in S$ を意味し, 公理 (P5) によって $S = X$ となる. したがって, すべての x に対して $f(x) = g(x)$ がわかる.

では, (15.3) を満たす写像 $f: X \rightarrow A$ が存在することを示そう. 集合による写像の定義によれば, 部分集合 $\Phi \subset X \times A$ で

- (i) 任意の $x \in X$ に対して, $(x, y) \in \Phi$ となる $y \in A$ が一意的に存在する,
- (ii) $(e, a) \in \Phi$,
- (iii) $(x, y) \in \Phi \Rightarrow (\varphi(x), F(y)) \in \Phi$,

の 3 条件を満たすものが存在することを示せばよい. (写像 f は (i) によって与えられる対応 $x \mapsto y$ として定義される.)

まず, 条件 (ii), (iii) を満たす部分集合 $\Phi \subset X \times A$ を集めてできる集合族を Ω とする. 明らかに, $X \times A$ 自身が (ii), (iii) を満たすので, $\Omega \neq \emptyset$ である. したがって,

$$\Phi_0 = \bigcap_{\Phi \in \Omega} \Phi$$

は, (ii), (iii) を満たす $X \times A$ の部分集合のうち最小のものを与える. この Φ_0 が (i) を満たすことを示せば, Φ_0 が求めるべき写像 (のグラフ) となり, 存在証明が終わる. そのために,

$$S = \{x \in X \mid \text{ある } y \in A \text{ が一意的に存在して } (x, y) \in \Phi_0\}$$

とにおいて, $S = X$ を示せばよい.

最初に, $e \in S$ であることを背理法で示す. そのため, $e \notin S$ と仮定する. (ii) によって $(e, a) \in \Phi_0$ であるが, $e \notin S$ であるから, $b \in A$, $b \neq a$ で $(e, b) \in \Phi_0$ となるものが存在する. $\Phi' = \Phi_0 \setminus \{(e, b)\}$ を考えよう. 明らかに, $(e, a) \in \Phi'$ が成り立つ. $(x, y) \in \Phi'$ とすると, $(\varphi(x), F(y)) \in \Phi_0$ であるが, $\varphi(x) \neq e$ であるから, $(\varphi(x), F(y)) \neq (e, b)$ である. したがって, $(\varphi(x), F(y)) \in \Phi'$ がわかる. そうすると, Φ' も (ii), (iii) を満たすことになって, Φ_0 の最小性に反して矛盾である. したがって, $e \in S$ である.

次に, $x \in S \Rightarrow \varphi(x) \in S$ を示す. $x \in S$ とすると, S の定義によって, $(x, y) \in \Phi_0$ となる $y \in A$ が一意的に存在する. (ii) によって, $(\varphi(x), F(y)) \in \Phi_0$ である. もし, $b \in A$, $b \neq F(y)$ で $(\varphi(x), b) \in \Phi_0$ が存在したとする. $\Phi' = \Phi_0 \setminus \{(\varphi(x), b)\}$ を考えると, これも (ii), (iii) を満たす. 実際, $(e, a) \in \Phi_0$ で, $(e, a) \neq (\varphi(x), b)$ は明らかなので, $(e, a) \in \Phi'$ はよい. $(z, w) \in \Phi'$ とすると, $(z, w) \in \Phi_0$ なので $(\varphi(z), F(w)) \in \Phi_0$ はよい. $(\varphi(z), F(w)) \neq (\varphi(x), b)$ を示す. 実際, $z \neq x$ ならば φ は単射なので, $(\varphi(z), F(w)) \neq (\varphi(x), b)$ は明らか. $z = x$ ならば $(z, w) = (x, w) \in \Phi_0$. よって, $w = y$. そうすると, $(\varphi(z), F(w)) = (\varphi(x), F(y)) \neq (\varphi(x), b)$ なのでよい. そうすると, Φ' も (ii), (iii) を満たすことになり, Φ_0 の最小性に反して矛盾である. したがって, $\varphi(x) \in S$ が成り立つ.

以上から公理 (P5) の 2 条件が示されたので, $S = X$ である. ■

上の定理 15.3 によって, (15.3) を写像 $f: X \rightarrow A$ の定義に採用することができる. これを帰納的定義または再帰的定義という. この定義の根拠をペアノの公理 (P5) に求めている点に注目しておこう. ペアノ系として $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ をとって定理 15.3 を読み替えると次の定理が得られる.

定理 15.4 (写像の帰納的定義) A を空でない集合, $F: A \rightarrow A$ を任意の写像, $a \in A$ を任意の元とする. このとき, 次の性質をもつ写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ が一意的に存在する.⁴⁾

$$f(1) = a, \quad f(n+1) = F(f(n)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15.4)$$

■ ペアノの公理の完全性 ペアノ系は本質的に 1 つしかないことを示す.

定理 15.5 ペアノ系 (X, e, φ) , (Y, e', ψ) に対して, 全単射 $f: X \rightarrow Y$ で

$$f(e) = e', \quad f(\varphi(x)) = \psi(f(x)), \quad x \in X, \quad (15.5)$$

を満たすものが存在する. 関係式 (15.5) の後半は, $f \circ \varphi = \psi \circ f$ と同値であり, 次の図式で見ておくのが便利である.

⁴⁾ 馴染みのある記法として $n+1$ と書いたが, ここでは加法としてではなく, n の次の自然数を表す記号と理解する方がよい.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\psi} & Y
 \end{array}$$

証 明 定理 15.3 において, $A = Y$, $F = \psi$, $a = e'$ とおけば,

$$f(e) = e', \quad f(\varphi(x)) = \psi(f(x)), \quad x \in X,$$

を満たす写像 $f : X \rightarrow Y$ が一意に存在する. X, Y の役割を入れ替えて, 同様の議論をすれば,

$$g(e') = e, \quad g(\psi(y)) = \varphi(g(y)), \quad y \in Y,$$

を満たす写像 $g : Y \rightarrow X$ が一意に定まる. ここで, 合成写像 $h = g \circ f : X \rightarrow X$ を考えよう. まず,

$$h(e) = g(f(e)) = g(e') = e$$

がわかる. さらに, 任意の $x \in X$ に対して,

$$h(\varphi(x)) = g(f(\varphi(x))) = g(\psi(f(x))) = \varphi(g(f(x))) = \varphi(h(x))$$

である. 一方, 恒等写像 $i_X : X \rightarrow X$ も同じ関係式

$$i_X(e) = e, \quad i_X(\varphi(x)) = \varphi(i_X(x)), \quad x \in X,$$

を満たすので, 帰納的定義の一意性によって $h = i_X$ がわかる. したがって, $g \circ f = i_X$ である. 同様に, $f \circ g = i_Y$ も得られるので f は全単射である. ■

15.3 自然数の加法・乗法・順序

自然数の加法, 乗法, 順序をペアノの公理だけを用いて導入して, それらが満たす法則を導出する. ペアノの公理だけを用いるという立場を明確にするため

に, (X, e, φ) のような自然数をイメージし難い記号を使うのも 1 つのやり方であろうが, 結局のところ, 自然数に関するよく知られた法則を導出して再確認することになるので, 初めからペアノ系 $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ を扱うことにする.

四則算法のうち最も基本的なものは加法である. デデキントは, まず順序を扱い, それをもとにして加法を導いた. ペアノは加法を先に扱い, 順序を後回しにした. 実は, ペアノの議論には見落としがあり, ランダウ⁵⁾はそれを修正した. 本書では, ペアノとランダウの流儀に従って加法の導入から始める.

■ 加法 自然数の加法 $x + 1$ は, 要するに x の次の自然数を与える演算であるから, 後継写像を用いて $x + 1 = \varphi(x)$ とすればよい. この類推で, 一般の $x + y$ は後継写像の繰り返し $\varphi(\varphi(\cdots(\varphi(x))\cdots))$ で定義されるだろうという見通しが立つ. 要は, 繰り返し「 $\cdots$ 」ではなく, 2 項演算すなわち写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ として加法をきちんと定義することが重要なのである.

定 理 15.6 写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ で次を満たすものが一意的に存在する.

- (i) $f(x, 1) = \varphi(x)$.
- (ii) $f(x, \varphi(y)) = \varphi(f(x, y))$.

証 明 固定された $x \in \mathbb{N}$ に対して, 写像 $g_x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ で

- (i) $g_x(1) = \varphi(x)$,
- (ii) $y \in \mathbb{N}$ に対して $g_x(\varphi(y)) = \varphi(g_x(y))$,

を満たすものが一意的に存在する. 実際, 上の (i),(ii) は写像 g_x の帰納的定義になっている (定理 15.3 において $A = \mathbb{N}$, $F = \varphi$, $a = \varphi(x)$ とおけばよい). そうすれば, 対応 $x \mapsto g_x$ は写像 $g: \mathbb{N} \rightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ を与えるから, $f(x, y) = g_x(y)$ が求めるものになる. ■

定理 15.6 の写像 f を用いて定義される $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算 $x + y = f(x, y)$ を $\mathbb{N}$ における加法という. 定理に述べた性質 (i),(ii) はそれぞれ次のようになる.

- (i') $x + 1 = \varphi(x)$,
- (ii'') $x + \varphi(y) = \varphi(x + y) \Leftrightarrow x + (y + 1) = (x + y) + 1$,

⁵⁾Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938). ドイツの数学者. 1930 年の著書 [47](和訳 [16]) はペアノのアイデアにしたがって, 自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数の体系を厳密に展開した最初の本である. 「教師への序文」の中で, ペアノの議論に見落としがあることを親しい同僚から指摘され, 少し困ったが, 無事に修正できたとある. さらに, 平均的な学生なら 2 日で読めるだろうと述べて, 数学的帰納法とデデキントの基本定理 (連続性定理のこと) を除いて内容を忘れてよいとも書いている. この本は, それに続く人たちに大きな影響を与えた.

15.3. 自然数の加法・乗法・順序

227

まず, $x+1$ を定義して, 帰納的に $x+2, x+3, \dots$ を定義している.

定理 15.7 $\mathbb{N}$ における加法は次の性質をもつ.

- (1) [結合法則] $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- (2) [交換法則] $x + y = y + x$.

証明 (1) $f(x, y) = x + y$ とおく. 写像 f は定理 15.6 の性質 (i), (ii) を満たす. ここで $x, y \in \mathbb{N}$ を固定して, 2 つの写像

$$\begin{aligned} h_1(z) &= x + (y + z) = f(x, f(y, z)), \\ h_2(z) &= (x + y) + z = f(f(x, y), z), \end{aligned}$$

を考える. まず,

$$\begin{aligned} h_1(1) &= x + (y + 1) = f(x, y + 1) = f(x, \varphi(y)) = \varphi(f(x, y)), \\ h_2(1) &= (x + y) + 1 = f(x + y, 1) = \varphi(x + y) = \varphi(f(x, y)), \end{aligned}$$

から $h_1(1) = h_2(1)$ がわかる. さらに, 任意の $z \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} h_1(\varphi(z)) &= f(x, f(y, \varphi(z))) = f(x, \varphi(f(y, z))) \\ &= \varphi(f(x, f(y, z))) = \varphi(h_1(z)) \end{aligned}$$

が得られ, 同様にして $h_2(\varphi(z)) = \varphi(h_2(z))$ がわかる. そうすると, 帰納的定義の一意性から $h_1(z) = h_2(z)$ がわかる.

(2) 2 つの写像 $h_1(y) = x + y$, $h_2(y) = y + x$ に対して (1) と同様の議論をすればよい (試みよ). ■

■ **数学的帰納法** 加法を用いて (P5) を書き換えたものが次の主張である.

定理 15.8 (数学的帰納法の原理) $\mathbb{N}$ の部分集合 S が次の 2 条件

- (i) $1 \in S$, (ii) $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,

を満たせば, $S = \mathbb{N}$ である.

定理 15.9 (数学的帰納法) $n \in \mathbb{N}$ を変数とする命題関数 $P(n)$ が次の 2 条件を満たせば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ.

- (i) $P(1)$ が成り立つ.
- (ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ が成り立つ.

証明 $\mathbb{N}$ の部分集合 $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ が定理 15.8 の条件 (i),(ii) を満たすことは明らかである. したがって, $S = \mathbb{N}$ となり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ が成り立つ. ■

■ 乗法 自然数の乗法は, $xy = x + x + \cdots + x$ のように加法の繰り返しである. このことを帰納的に見直して, 2 項演算として定義すればよい.

定理 15.10 写像 $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ で次を満たすものが一意に存在する.

- (i) $g(x, 1) = x$.
- (ii) $g(x, \varphi(y)) = g(x, y) + x$.

証明は定理 15.6 と同様に写像の帰納的定義に帰着すればよい. 定理 15.10 の写像 g を用いて定義される $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算 $x \cdot y = g(x, y)$ を $\mathbb{N}$ における乗法という. しばしば, $x \cdot y = xy$ のように略記する. 定理 15.10 の (i),(ii) はそれぞれ,

- (i') $x1 = x$,
- (ii'') $x\varphi(y) = xy + x \Leftrightarrow x(y+1) = xy + x$,

と書いてもよい. 次の法則は定理 15.7 と同様に証明される.

定理 15.11 $\mathbb{N}$ における乗法は次の性質をもつ.

- (1) [結合法則] $x(yz) = (xy)z$.
- (2) [交換法則] $xy = yx$.
- (3) [乗法の単位元] $1x = x1 = x$.

さらに, 加法と乗法の組合せに関して次が成り立つ.

- (4) [分配法則] $x(y+z) = xy + xz$.

■ 順序 自然数 $\mathbb{N}$ は 1 から始まり, 後継写像を次々に作用することで得られる. そこで, 自然数 x に後継写像 φ を繰り返し作用して y が得られるとき, $x < y$ のように大小が定まる. このことを定式化すれば自然数の順序関係が定義されるが, ここではすでに導入した加法を用いて順序関係を定義しよう.

補題 15.12 すべての $x, y \in \mathbb{N}$ に対して $x + y \neq x$ が成り立つ.

証明 $\mathbb{N}$ の部分集合 $S = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{すべての } y \in \mathbb{N} \text{ に対して } x + y \neq x\}$ を考える. まず, (P4) によって, すべての y に対して $\varphi(y) \neq 1$ である. これは加法の定義から, $y + 1 \neq 1$ を意味するので, $1 \in S$ がわかる. 次に, $x \in S \Rightarrow x + 1 \in S$ を示す. 仮定から, すべての $y \in \mathbb{N}$ に対して $x + y \neq x$ が成り立つ. (P3) によって, $\varphi(x + y) \neq \varphi(x)$ である. 加法の定義によって $(x + y) + 1 \neq x + 1$, つまり, $(x + 1) + y \neq x + 1$ となる. これは $x + 1 \in S$ を意味する. そうすると, 定理 15.8 によって, $S = \mathbb{N}$ が得られ証明が終わる. ■

補題 15.13 $x \in \mathbb{N}$ が $x \neq 1$ を満たせば, ある $u \in \mathbb{N}$ が存在して $x = u + 1$ と表される.

証明 まず, $\mathbb{N} = \varphi(\mathbb{N}) \cup \{1\}$ が容易にわかる (定理 15.1 または問 15.1). したがって, $x \in \mathbb{N}$ で $x \neq 1$ を満たすものは $\varphi(\mathbb{N})$ に属し, ある $u \in \mathbb{N}$ によって $x = \varphi(u)$ となる. これは $x = u + 1$ を意味する. ■

定理 15.14 $x, y \in \mathbb{N}$ に対して, 次の 3 つの場合のうち 1 つだけが成り立つ.

- (i) ある $u \in \mathbb{N}$ が存在して $x + u = y$.
- (ii) $x = y$.
- (iii) ある $u \in \mathbb{N}$ が存在して $x = y + u$.

証明 補題 15.12 によって (i) と (ii) は両立しない. 同様に, (ii) と (iii) も両立しない. (i) と (iii) が両立したとすると, ある $u, v \in \mathbb{N}$ が存在して, $x + u = y$, $x = y + v$ となり,

$$x = y + v = (x + u) + v = x + (u + v)$$

が成り立つ. これは補題 15.12 に反するから, (i) と (iii) も両立しない.

主張の証明のためには, $x, y \in \mathbb{N}$ に対して, (i) または (ii) または (iii) が成り立つことを示せばよい. このことを任意に $y \in \mathbb{N}$ を固定して, x に関する数学的帰納法で示す. まず, $x = 1$ の場合は, 補題 15.13 によって $y = 1$ であるか $y = u + 1$ となるので, (ii) または (i) が成り立つ. 次に, x に対して (i)–(iii) のいずれかが成り立つと仮定して $x + 1$ もそうなることを示す. (i) の場合は $x + u = y$ となっている. $u = 1$ であれば $x + 1 = y$ となって $x + 1$ は (ii) を

満たす. $u \neq 1$ であれば, 補題 15.13 によって $u = v + 1$ となる. そうすると, $y = x + u = x + (v + 1) = (x + 1) + v$ が得られ, $x + 1$ は (i) を満たす. (ii) の場合は $x = y$ であるから $x + 1 = y + 1$ となり, $x + 1$ は (iii) を満たす. (iii) の場合は $x = y + u$ であるから $x + 1 = y + (u + 1)$ となり, $x + 1$ も (iii) を満たす. こうして, 数学的帰納法の前提が示されたので, すべての x に対して (i)–(iii) のいずれかが成り立つ. ■

$x, y \in \mathbb{N}$ に対して, ある $u \in \mathbb{N}$ が存在して $x + u = y$ となるとき, $x < y$ と定義する. これは $\mathbb{N}$ 上の 2 項関係である.

定理 15.15 $(\mathbb{N}, <)$ は全順序集合であり, 1 が最小元になる.

証明 定理 15.14 によって, すべての $x, y \in \mathbb{N}$ に対して

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

のいずれか 1 つだけが成り立つ. 特に, $x < y$ と $y < x$ は両立しない. 次に, 推移律のために $x < y, y < z$ とすれば, ある $u, v \in \mathbb{N}$ が存在して $x + u = y, y + v = z$ となる. そうすると,

$$z = y + v = (x + u) + v = x + (u + v)$$

となり, $x < z$ がわかる. こうして, 2 項関係 $<$ が $\mathbb{N}$ 上の等号なしの順序関係を定め, $(\mathbb{N}, <)$ が順序集合になる. これが全順序集合であるのは, 定理 15.14 から明らかである.

$x \in \mathbb{N}$ を $x < 1$ を満たすものとする. 2 項関係 $<$ の定義から $x + u = 1$ を満たす u が存在する. 補題 15.12 から $x \neq 1$ である. そうすると, 補題 15.13 によって $x = v + 1$ と表されるので, $1 = x + u = (v + 1) + u = 1 + (u + v)$ が得られて, 補題 15.12 に反する. したがって, $x < 1$ を満たす x は存在せず, $\mathbb{N}$ が全順序集合であることから, すべての $x \in \mathbb{N}$ は $x \geq 1$ を満たす. ■

簡単のために, $x \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{N}\langle x \rangle = \{y \in \mathbb{N} \mid y < x\}$$

と書くことにする. 次は明らかであろう.

$$\mathbb{N}\langle x + 1 \rangle = \mathbb{N}\langle x \rangle \cup \{x\}, \quad x \in \mathbb{N}, \quad (15.6)$$

定理 15.16 (自然数の整列性) $(\mathbb{N}, <)$ は整列集合である. すなわち, $\mathbb{N}$ の任意の空でない部分集合 A には最小元 $\min A$ が存在する.

証明 空でない部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に $\min A$ が存在しなかったと仮定して矛盾を導けばよい. $\mathbb{N}$ の部分集合 $S = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}\langle x \rangle \subset \mathbb{N} \setminus A\}$ を考える.

はじめに, $S = \mathbb{N}$ を示そう. まず, $1 \in S$ は $\mathbb{N}\langle 1 \rangle = \emptyset$ から明らかである. 次に, $x \in S$ とする. 定義から, $\mathbb{N}\langle x \rangle \subset \mathbb{N} \setminus A$ であるから, $y \in A$ であれば $y \geq x$ となる. したがって, もし $x \in A$ とすると $x = \min A$ となり, $\min A$ が存在しないとした仮定に矛盾する. したがって, $x \notin A$, つまり $x \in \mathbb{N} \setminus A$ である. そうすると, $\mathbb{N}\langle x \rangle \subset \mathbb{N} \setminus A$ と合わせて, $\mathbb{N}\langle x \rangle \cup \{x\} \subset \mathbb{N} \setminus A$ が得られ, (15.6) を適用すれば, $\mathbb{N}\langle x+1 \rangle \subset \mathbb{N} \setminus A$ となる. これは $x+1 \in S$ を意味する.

次に, $S \neq \mathbb{N}$ を示すことで, 前段と合わせて矛盾を得て証明を終える. 仮定 $A \neq \emptyset$ によって $a \in A$ が存在する. このとき, $a \in \mathbb{N}\langle a+1 \rangle$ かつ $a \notin \mathbb{N} \setminus A$ であるから, $x = a+1$ は $\mathbb{N}\langle x \rangle \subset \mathbb{N} \setminus A$ を満たさない. これは $a+1 \notin S$ を意味し, $S \neq \mathbb{N}$ が示された. ■

問 15.3 (加法に関する簡約法則) 自然数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

- (1) $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y.$
- (2) $x + z < y + z \Leftrightarrow x < y.$

問 15.4 (乗法に関する簡約法則) 自然数 $x, y, z \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

- (1) $xz = yz \Leftrightarrow x = y.$
- (2) $xz < yz \Leftrightarrow x < y.$

15.4 自然数の構成

本節では集合の公理からペアノ系を構成して, 確かにペアノ系が存在することを示す. まず, 簡潔な記述のため, 次の2条件

- (i) $\emptyset \in A,$
- (ii) $x \in A \Rightarrow x^+ = x \cup \{x\} \in A,$

を満たす集合 A を帰納的集合ということにする. 集合の公理の一つである無限公理 (S6) は, 帰納的集合の存在を保証するものに他ならない. ただし, 公理では一意性について何も主張していない. そこで, 最小の帰納的集合を考える.

定理 15.17 (最小の帰納的集合) 任意の帰納的集合 A に対して $N_0 \subset A$ となる帰納的集合 N_0 が一意的に存在する.

証明 無限公理 (S6) によって存在が保証されている帰納的集合を 1 つとり A とする. A の部分集合で帰納的集合になっているものの全体を B とおく. A 自身が B に属するから $B \neq \emptyset$ であり, その共通部分

$$N_0 = \bigcap_{B \in B} B \quad (15.7)$$

をとることができる.⁶⁾ 明らかに, N_0 自身も帰納的集合であり, A に含まれる最小の帰納的集合になる.

(15.7) の N_0 が望むべきものであることを示そう. A' を任意の帰納的集合とする. 上と同じ操作によって得られる帰納的集合を N'_0 とする. このとき, $N_0 \cap N'_0$ も帰納的集合であり, N_0 の部分集合であるから, A に含まれる. 一方, N_0 は A に含まれる最小の帰納的集合であるから, $N_0 \subset N_0 \cap N'_0$ が成り立ち, $N_0 \subset N'_0$ がわかる. 逆向きの包含関係も同様に導かれるから $N_0 = N'_0$ が得られ, $N_0 \subset A'$ がわかる. つまり, N_0 はすべての帰納的集合に共通に含まれる.

一意性を示す. S をすべての帰納的集合 A に対して $S \subset A$ を満たす帰納的集合とする. 特に, N_0 は帰納的集合であるから $S \subset N_0$ が成り立つ. 一方, 前段の議論から N_0 は任意の帰納的集合の部分集合であるから $N_0 \subset S$ も成り立つ. したがって, $S = N_0$ となる. ■

定理 15.18 N_0 の部分集合 A が,

(i) $\emptyset \in A$,

(ii) $x \in A \Rightarrow x^+ \in A$,

を満たせば, $A = N_0$ である.

⁶⁾ 共通部分を積集合というように, それが集合になるのは自明に見えるが, 実は, このような操作によって集合ができることは分出公理 (S7) によっている.

15.4. 自然数の構成

233

証明 条件 (i),(ii) から A は帰納的集合であり, 定理 15.17 によって $\mathbb{N}_0 \subset A$ が得られる. これと初めの仮定 $A \subset \mathbb{N}_0$ を合わせて $A = \mathbb{N}_0$ がわかる. ■

定理 15.19 (ペアノ系の存在) $\mathbb{N}_0$ において $e = \emptyset, \varphi(x) = x^+ = x \cup \{x\}$ とすれば, $(\mathbb{N}_0, \emptyset, \varphi)$ はペアノ系である.

証明 $\mathbb{N}_0$ は集合であり, $\emptyset \in \mathbb{N}_0$ であるから (P1) が成り立つ. $\mathbb{N}_0$ は帰納的集合であるから, $x \mapsto x^+$ は写像 $\varphi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ を与える. つまり, (P2) が成り立つ. 一般に, 集合 x, y に対して $x \neq y$ ならば $x^+ \neq y^+$ であるから (P3) が成り立つ (補題 3.16). 一般に, すべての集合 x に対して $x^+ \neq \emptyset$ であるから (P4) もよい. (P5) は定理 15.18 に他ならない. ■

■ **順序数としての自然数** 順序数 α とは推移的な集合であって, 帰属関係 $\in$ によって $(\alpha, \in)$ が整列集合になるものであった (第 14.3 節).

定理 15.20 $\mathbb{N}_0$ の元はすべて順序数である.

証明 $\mathbb{N}_0$ の部分集合 $S = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ は順序数}\}$ を考えて, $S = \mathbb{N}_0$ を示せばよい. そのためには S が帰納的集合であることを示せばよい (定理 15.18). まず, $\emptyset \in \mathbb{N}_0$ であり, $\emptyset$ 自身は順序数であるから $\emptyset \in S$ となる. 次に, $x \in S$ とする. $\mathbb{N}_0$ は帰納的集合であるから $x^+ \in \mathbb{N}_0$ である. 一方, x は順序数なので, 定理 14.21 によって x^+ も順序数となり $x^+ \in S$ がわかる. 以上によって, S は帰納的集合である. ■

一般に, 順序数 α, β に対しては, $\alpha \in \beta$ と書かずに $\alpha < \beta$ と書く. そうすると, 次が成り立つのだった.

- (1) 順序数 α, β に対して, $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$ のいずれか 1 つが成り立つ.
- (2) [推移律] 順序数 α, β, γ に対して $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.
- (3) [後続順序数] 順序数 α の後続順序数は $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ である. すなわち, $\alpha < \alpha^+$ が成り立ち, $\alpha < \beta < \alpha^+$ を満たす順序数 β は存在しない.

空集合 $\emptyset$ を順序数 (それは最小の順序数である) と考えるときは 0 と書くのだった. 順序数 0 の後続順序数を次々に配列すれば,

$$0 < 0^+ < 0^{++} < 0^{+++} < \dots \quad (15.8)$$

となる. これらはすべて $\mathbb{N}_0$ の元である. (15.8) は, 実際には空集合 $\emptyset$ から始まる集合の列であり,

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 0^+ &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \\ 0^{++} &= \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 0^{+++} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (15.9)$$

のようになっている. これらに, あらためて記号 $0, 1, 2, \dots$ を割り振れば,

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}, \\ 2 &= 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (15.10)$$

が得られる. 空集合が入れ子になった表示 (15.9) は奇怪な感じを与えるが, (15.10) を見れば極めて自然な操作であると言える. 実際, (15.8) は

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots \quad (15.11)$$

のような見慣れた配列に他ならない. 要は, 空集合 $0 = \emptyset$ から始めて, 後続順序数を次々に考えることで自然数が次々に得られるのである.⁷⁾ ただし, このような操作的な言い方だけでは自然数を定義したことにはならない. (15.8) あるいは (15.11) の元を集めて $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ としても集合を定義したことにならないからである.

■ **自然数の定義** $\mathbb{N}_0$ の元を有限順序数という. 0 以外の有限順序数を自然数という. 自然数の集合を $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ と書く.

定理 15.21 $\mathbb{N}$ において $e = 1 = 0^+$, $\varphi(x) = x^+ = x \cup \{x\}$ とすれば, $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ はペアノ系である.

⁷⁾ このアイデアは順序数の定義 (第 14.3 節) とともにフォン・ノイマンによる [56] (1923).

15.4. 自然数の構成

235

証明は $(\mathbb{N}_0, \emptyset, \varphi)$ がペアノ系である (定理 15.19) ことから容易である. ここで, $\mathbb{N}$ には 2通りの順序が定義されることに注意しよう. まず, $\mathbb{N}$ の元が順序数であることから定義される順序 (上ではこれを $<$ と書いている) と $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ がペアノ系であることから第 15.3 節の議論によって定義される順序 (これを $<_P$ と書こう) である. しかしながら, すべての $x \in \mathbb{N}$ に対して $\{y \in \mathbb{N} \mid y < x\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y <_P x\}$ が成り立つことが x に関する数学的帰納法によって容易に示されるので, 2つの順序は一致する.

■ 有限集合 加法 $x + y$ は $\mathbb{N}$ の最初の元 $y = 1$ から帰納的に定義したので, ペアノ系としては $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ が好都合である. 一方, 有限集合の定義には $(\mathbb{N}_0, 0, \varphi)$ が便利である. つまり, 集合 A に対して, ある $x \in \mathbb{N}_0$ と全単射 $f: A \longrightarrow x$ が存在するとき, A を有限集合と定義する. このとき, x が一意的に定まることが示される (問 15.7). これをもって, A の濃度を $|A| = x$ と定義する. この定義は, 第 14.3 節の最後で述べた順序数による濃度の定義に合致している.

問 15.5 定理 15.17 の $\mathbb{N}_0$ は推移的であることを示せ. このことから, $\mathbb{N}_0$ は順序数であることを示せ.

問 15.6 $\mathbb{N}_0 = \bigcup \mathbb{N}_0$ を示せ. (このことと問 14.8 と組み合わせても $\mathbb{N}_0$ が順序数であることがわかる.)

問 15.7 $x, y \in \mathbb{N}_0$ が $x \neq y$ を満たせば, 全単射 $f: x \longrightarrow y$ が存在しないことを示せ.