

第16章 整数・有理数・実数

前章では, 順序数を用いて自然数を定義し, ペアノの公理によって自然数を特徴づけた. さらに, 自然数に加法・乗法・順序を導入して代数系としての基本的な性質を証明した. 本章では, 代数系の観点から自然数を拡大して整数と有理数を導入し, デデキントの切断を用いて実数を構成する.

16.1 整数

■ **代数系** 1 項演算や 2 項演算が与えられた空でない集合 X を代数系という. 1 項演算とは写像 $X \rightarrow X$ のことであり, 2 項演算とは写像 $X \times X \rightarrow X$ のことである. 代数系は, 与えられた演算の満たす性質によって分類される.

■ **群** 集合 G に 2 項演算 $x \cdot y$ が与えられていて, 次の 3 条件を満たすとき, 代数系 $(G, \cdot)$ を群という. ただし, 以下では $x \cdot y = xy$ と略記する.

(i) [結合法則] $x(yz) = (xy)z$.

(ii) [単位元の存在] ある元 $e \in G$ が存在して, すべての $x \in G$ に対して $xe = ex = x$ が成り立つ. この e を単位元という.

(iii) [逆元の存在] すべての $x \in G$ に対して $xy = yx = e$ をみたす $y \in G$ が存在する. この y を x の逆元という.

単位元は一意的である. 実際, $e' \in X$ も単位元であれば, すべての $x \in X$ に対して $xe' = e'x = x$ が成り立つ. $x = e$ を代入して, e が単位元であることも用いれば $e = e'$ がわかる. さらに, 逆元も一意的に定まる. 実際, y, z がともに x の逆元であれば, $xy = yx = e$ と $xz = zx = e$ が成り立つ. そうすると,

$$y = ey = (zx)y = z(xy) = ze = z$$

となって, $y = z$ が従う. $x \in G$ の逆元を x^{-1} と書く.

群 $(G, \cdot)$ は交換法則 $xy = yx$ を満たすとき、可換群という。特に、群演算を加法 $x + y$ で書く可換群を加法群といい、単位元を 0 、逆元を $-x$ と書く。

■ 整数の構成 自然数 $\mathbb{N}$ は加法に関して群 (加法群) にならない。実際、結合法則はよいが、単位元が存在せず、したがって逆元も存在しない。自然数 $\mathbb{N}$ が加法群になるように、集合 $\mathbb{N}$ を拡張したものが整数である。直感的には、単位元となるべき新しい元 0 と各 $x \in \mathbb{N}$ の逆元となるべき新しい元 $-x$ を追加して、

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}), \quad -\mathbb{N} = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

のように集合 $\mathbb{N}$ を拡張して整数の集合 $\mathbb{Z}$ をつくる。しかしながら、自然数 $\mathbb{N}$ に「不足する元」を付け加えるという議論では、不足する元を一体どこから調達してくるのかという疑念がわく。

自然数 $\mathbb{N}$ を集合の公理で許されたものだけから構成したように、整数も今あるものだけから構成するのが望ましい。そのために、直積集合

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$$

を考えるとよい。まず、 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の2項関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x' \quad (16.1)$$

で定義する。容易にわかるように、 $\sim$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係になる。そこで、 $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を含む同値類を

$$[x, y] = \{(x', y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x', y') \sim (x, y)\}$$

と書き、同値類の集合を

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{[x, y] \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$$

と書く。 $\mathbb{Z}$ の元を整数という。これをもって整数の定義とするアイデアは、任意の整数が自然数の差 $x - y$ で表されるところから来る。

同値類の集合 $\mathbb{Z}$ に加法を

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \quad (16.2)$$

で定義する。右辺が左辺の同値類の代表元の取り方によらないことを確認する必要がある。つまり、 $[x_1, y_1] = [x'_1, y'_1]$, $[x_2, y_2] = [x'_2, y'_2]$ のとき、

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2] \quad (16.3)$$

16.1. 整数

239

となる必要があるが, 同値関係の定義 (16.1) に戻って,

$$x_1 + x_2 + y'_1 + y'_2 = y_1 + y_2 + x'_1 + x'_2$$

が得られるのでよい.

定理 16.1 $(\mathbb{Z}, +)$ は $[1, 1]$ を単位元とする加法群である.

証明 加法が結合法則と交換法則を満たすことは見やすい. さらに, $[1, 1]$ が単位元になることも明らか. 逆元の存在を示そう. 任意の $[x, y]$ に対して,

$$[x, y] + [y, x] = [x + y, y + x] = [1, 1] \quad (16.4)$$

となるから, $[x, y]$ の逆元が存在して,

$$-[x, y] = [y, x] \quad (16.5)$$

となることがわかる. したがって, $(\mathbb{Z}, +)$ は加法群である. ■

ここで, 写像 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定義する.

$$i(x) = [x + 1, 1], \quad x \in \mathbb{N}. \quad (16.6)$$

補題 16.2 写像 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ は単射であり, 次を満たす.

$$i(x + y) = i(x) + i(y), \quad x, y \in \mathbb{N}. \quad (16.7)$$

証明 $x, y \in \mathbb{N}$ に対して, $i(x) = i(y)$ であれば $[x + 1, 1] = [y + 1, 1]$ となる. 定義から $(x + 1) + 1 = 1 + (y + 1)$ となり, 簡約法則 (問 15.3) によって $x = y$ がわかる. したがって, $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ は単射である. 次に,

$$\begin{aligned} i(x + y) &= [x + y + 1, 1] = [x + y + 2, 2] \\ &= [x + 1, 1] + [y + 1, 1] = i(x) + i(y) \end{aligned}$$

から (16.7) が示される. ■

補題 16.2 は, 加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ が代数系として $(\mathbb{N}, +)$ の拡大系になることを言っている. そこで, 単射 i を通して $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ の部分集合として扱い, $x \in \mathbb{N}$ に対応する $\mathbb{Z}$ の元を $i(x)$ とか $[x + 1, 1]$ と書かずにそのまま x と書くことにする.

■ 零・正の整数・負の整数 まず, $(\mathbb{Z}, +)$ の単位元を

$$0 = [1, 1]$$

と書く. 明らかに, $0 \notin \mathbb{N}$ である (問 16.1). これが数の零である. 自然数 $x \in \mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の元として逆元 $-x$ をもつが,

$$-x = -[x + 1, 1] = [1, x + 1]$$

で与えられる. もちろん, $-x \notin \mathbb{N}$ である (問 16.1). また, $x \mapsto -x$ は $\mathbb{N}$ から $-\mathbb{N} = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$ の上への全単射になる. 集合 $-\mathbb{N}$ の元を負の整数といい, それに対応して $\mathbb{N}$ の元を正の整数という.

補題 16.3 $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ が成り立つ.

証明 $\mathbb{Z}$ の任意の元は, $x, y \in \mathbb{N}$ を用いて $[x, y]$ と表される. まず, $x < y$ であれば, ある $u \in \mathbb{N}$ を用いて, $x + u = y$ となる. このとき,

$$[x, y] = [x, x + u] = [x + 1, x + u + 1] = [1, u + 1] = -[u + 1, 1] \quad (16.8)$$

となり, $[x, y] = -u \in (-\mathbb{N})$ が得られる. $x = y$ であれば, $[x, y] = [x, x] = 0$ である. 最後に $x > y$ であれば, ある $u \in \mathbb{N}$ を用いて $x = y + u$ となる. このとき, (16.8) と同様にして, $[x, y] = [u + 1, 1]$ となり, $[x, y] = u \in \mathbb{N}$ が得られる. したがって, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ である. ■

問 16.1 集合 $\mathbb{N}, \{0\}, -\mathbb{N}$ は互いに素であることを示せ.

問 16.2 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, 次が成り立つことを定義に基づいて示せ.

$$-(-x) = x, \quad -(x + y) = (-x) + (-y)$$

■ 環 集合 R に加法と乗法と呼ばれる 2 つの演算 $x + y$ と xy が与えられていて, 次の条件が満たされているとき, R を環という.¹⁾

(a) R は加法に関して可換群 (加法群) である.

¹⁾条件 (b) から (ii) と (iii) を外したものを環と呼び, (ii) を満たすものを可換環, (iii) を満たすものを単位的環と呼ぶ文献もある. そうすると, ここで定義した環は単位的可換環となる.

16.1. 整数

241

(b) R の乗法は次の性質を満たす.

(i) [結合法則] $x(yz) = (xy)z$.

(ii) [交換法則] $xy = yx$.

(iii) [単位元の存在] ある $e \in R$ が存在して, すべての $x \in R$ に対して $ex = xe = x$ が成り立つ.

(c) [分配法則] $x(y+z) = xy + xz$.

環 R において, 加法に関する単位元を 0 で表し, 零元という. また, $x \in R$ の加法に関する逆元を $-x$ で表す. 群の単位元が一意的であるのと同様に, 環の乗法に関する単位元も一意的である. これを環 R の単位元といい, 1_R で表す.

零元だけからなる $R = \{0\}$ も環であるが, $R \neq \{0\}$ であれば, $1_R \neq 0$ である. 環 R の元 x に対して, $xy = yx = 1_R$ となるような $y \in R$ が存在するとき, x は可逆であるという. そのような y は一意的であり, $y = x^{-1}$ と書いて x の逆元という. 単位元 1_R は可逆であり, 逆元はそれ自身である.

■ 環としての整数 $\mathbb{Z}$ に乗法を

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = [x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2] \quad (16.9)$$

によって定義する. 加法 (16.2) の場合と同様に, この定義が同値類の代表元の取り方によらないことが確かめられる.

定理 16.4 ($\mathbb{Z}, +, \cdot$) は環になる. これを整数環または有理整数環と呼ぶ.

証明 環の条件 (a) は定理 16.1 で示した. さらに, 乗法が結合法則, 交換法則, 分配法則を満たすことが計算で容易に確かめられる. また,

$$[x, y] \cdot [2, 1] = [2x + y, x + 2y] = [x + (x + y), y + (x + y)] = [x, y]$$

から, $[2, 1]$ が乗法の単位元となる. 以上で, 条件 (b), (c) も確かめられた. ■

補題 16.5 (16.6) で与えた単射 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ は次を満たす.

$$i(xy) = i(x) \cdot i(y), \quad x, y \in \mathbb{N}. \quad (16.10)$$

証明 同値類と乗法の定義から,

$$[xy + 1, 1] = [xy + 1 + (x + y + 1), 1 + (x + y + 1)]$$

$$\begin{aligned}
 &= [(x+1)(y+1)+1, (x+1)+(y+1)] \\
 &= [x+1, 1] \cdot [y+1, 1]
 \end{aligned}$$

が成り立つ. これは (16.10) を意味する. ■

すでに, 単射 i を通して $\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の部分集合とみなしているが, 補題 16.2 と補題 16.5 によって $\mathbb{N}$ の加法と乗法が $\mathbb{Z}$ に拡張されている. 特に, $i(1) = [2, 1]$ から, 自然数 $1 \in \mathbb{N}$ が $\mathbb{Z}$ における乗法の単位元であることがわかる.

■ 減法と順序 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, 減法と呼ばれる 2 項演算を

$$x - y = x + (-y)$$

によって定義する. 右辺の $-y$ は y の加法に関する逆元である.

補題 16.6 $x, y \in \mathbb{N}$ に対して, $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$.

証明 定義によって,

$$x < y \Leftrightarrow \text{ある } u \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x + u = y \text{ を満たす} \quad (16.11)$$

である. $x + u = y$ の両辺に $(-x)$ を加えて, 減法の定義を用いれば, $x + u = y$ と $u = y - x$ は同値であることがわかる. したがって, (16.11) の右辺は $y - x \in \mathbb{N}$ と同値となり, 証明を終える. ■

補題 16.6 を念頭に, 整数 $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 $x < y$ を $y - x \in \mathbb{N}$ で定義する. この 2 項関係 $x < y$ は $\mathbb{N}$ 上の順序関係を $\mathbb{Z}$ に拡張したものであるが, 拡張された 2 項関係が再び順序関係になることは証明を要する.

定理 16.7 $(\mathbb{Z}, <)$ は全順序集合であり, $(\mathbb{N}, <)$ はその部分順序集合である. さらに, 次が成り立つ.

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}, \quad -\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}.$$

証明 $(\mathbb{Z}, <)$ が全順序集合であることを示す. 残りは直ちにわかる. まず, $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x < y$ と $y < x$ は両立しない. もし両立すれば, $y - x \in \mathbb{N}$ かつ $x - y \in \mathbb{N}$ が成り立ち,

$$(y - x) + (x - y) = (y + (-x)) + (x + (-y))$$

16.1. 整数

243

$$= (x + (-x)) + (y + (-y)) = 0$$

も $\mathbb{N}$ に属することになる. これは補題 16.3 に反する. 次に, 推移律を示す. $x < y$, $y < z$ とすると $y - x, z - y \in \mathbb{N}$ となり, それらの和 $(y - x) + (z - y) = z - x$ も $\mathbb{N}$ に属すから $x < z$ がわかる. したがって, $(\mathbb{Z}, <)$ は順序集合である. 与えられた $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x < y$, $x = y$, $y < x$ のいずれか 1 つが成り立つことは補題 16.3 から明らかである. ■

定理 16.8 (演算と順序の関係) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とする.

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
- (2) $z > 0$ のとき, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$.

証明 (1) $(y + z) - (x + z) = y - x$ から明らかである.

(2) $x < y$ ならば $x + u = y$ となる $u \in \mathbb{N}$ が存在する. また, $z > 0$ なので $uz \in \mathbb{N}$ となる. そうすると,

$$yz - xz = (x + u)z - xz = uz + xz + -(xz) = uz$$

から $xz < yz$ が得られる. 逆に, $xz < yz$ を仮定する. もし, $x \geq y$ であれば, 前半の結果から $xz \geq yz$ となるから, 仮定に反する. そうすると, $(\mathbb{Z}, <)$ は全順序集合であることから, $x < y$ が成り立つ. ■

問 16.3 R を環とする. 次のことを示せ.

- (1) 任意の $x \in R$ に対して $0x = 0$.
- (2) $x, y \in R$ に対して $-(xy) = (-x)y = x(-y)$.
- (3) $x \in R$ に対して $(-1_R)x = -x$.

問 16.4 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x < y \Rightarrow -y < -x$ を示せ.

問 16.5 $\mathbb{Z}$ において, $(-1)(-1) = 1$ を示せ.

問 16.6 (乗法の簡約法則) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ で $z \neq 0$ であれば, $xz = yz \Leftrightarrow x = y$ を示せ.

問 16.7 A を $\mathbb{Z}$ の空でない部分集合とする. A が下から有界であれば, A には最小数が存在する. また, A が上から有界であれば, A には最大数が存在する.

16.2 有理数

■ **体** 集合 F に加法と乗法と呼ばれる2つの演算 $x+y$ と xy が与えられていて、次の条件が満たされているとき、 F を体という。

(i) F は環であり、 $F \neq \{0\}$ 。

(ii) F の零元以外のすべての元は可逆である。

条件 (i) は $0 \neq 1$, つまり, (加法の単位元) $\neq$ (乗法の単位元) と同値である。したがって, F は少なくとも2元を含む。条件 (ii) から $F^\times = F \setminus \{0\}$ は乗法に関して群をなす。これを体 F の乗法群という。

■ **有理数の構成** 有理数は整数の比で表される数であるが, 整数から有理数を構成するという立場では, 比に対応する概念を集合と写像でつくらなければならない。やはり, 直積集合と同値類別が役に立つ。

直積集合

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$$

において,

$$(x, y) \sim (x', y') \iff xy' = yx' \quad (16.12)$$

によって定義される2項関係は同値関係になる(問16.8)。そこで, (x, y) を含む同値類を

$$\frac{x}{y} = \{(x', y') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (x', y') \sim (x, y)\}$$

と書く。ただし, スペースの節約のため x/y とも書く。これがいわゆる分数である。同値類の集合を

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \right\}$$

と書いて, $\mathbb{Q}$ の元を有理数という。これによって有理数の定義とするアイデアは, 有理数が整数の比 x/y で表されるところから来る。

同値関係の定義(16.12)から,

$$\frac{x}{y} = \frac{xu}{yu}, \quad \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}, \quad u \in \mathbb{Z}, \quad u \neq 0, \quad (16.13)$$

が成り立つ。特に, 有理数の表示 x/y において分母 y を正の整数 ($y \in \mathbb{N}$) に選ぶことができ, しばしば便利である。さらに, 有理数 $\mathbb{Q}$ に加法と乗法をそれぞれ

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{y_1 y_2}, \quad (16.14)$$

16.2. 有理数

245

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \quad (16.15)$$

によって定義する. 実際, 右辺が左辺の同値類の代表元の取り方によらないことが示されるので, 確かに $\mathbb{Q}$ に演算を定義したことになる.

定理 16.9 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ は体である. これを有理数体という.

証明 加法が結合法則, 交換法則を満たすことは容易である. また, 加法に関する単位元が $0/1$, 逆元が

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y},$$

で与えられることもすぐわかる. 次に, 乗法が結合法則, 交換法則を満たし, 乗法に関する単位元が $1/1$ で与えられることも易しい. 分配法則は次の 2 式

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1} \cdot \left(\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \right) &= \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2 y_3 + y_2 x_3}{y_2 y_3} = \frac{x_1 (x_2 y_3 + y_2 x_3)}{y_1 y_2 y_3}, \\ \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_3}{y_3} &= \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} + \frac{x_1 x_3}{y_1 y_3} = \frac{(x_1 x_2)(y_1 y_3) + (y_1 y_2)(x_1 x_3)}{y_1 y_2 y_1 y_3}, \end{aligned}$$

が等しいことが (16.13) からわかるのでよい. 以上で $\mathbb{Q}$ が環になっていることが示された. 最後に, 乗法の逆元が

$$\left(\frac{x}{y} \right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

で与えられることから, $0/1$ 以外の有理数はすべて可逆である. したがって, $\mathbb{Q}$ は体である. ■

ここで, 写像 $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を次のように定義する.

$$j(x) = \frac{x}{1}, \quad x \in \mathbb{Z}. \quad (16.16)$$

補題 16.10 写像 j は単射であり, 次を満たす.

$$j(x+y) = j(x) + j(y), \quad j(xy) = j(x)j(y), \quad x, y \in \mathbb{Z}. \quad (16.17)$$

証明は容易である. 上の単射 j によって $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とみなす. (16.6) の単射 i によって $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ の部分集合とみなしたのと同様に, $x \in \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ の元として扱うときは, $j(x)$ とか $x/1$ と書かずにもとの記号 x をそのまま用いる.

そうすると, $x = x/1$ である. 補題 16.10 によって, $\mathbb{Z}$ の加法と乗法が $\mathbb{Q}$ に拡張されることになる. 特に, $\mathbb{Q}$ における加法の単位元は 0, 乗法の単位元は 1 である.

■ 順序 2つの有理数 x_1/y_1 と x_2/y_2 において, 分母は正の整数に選ばれているものとする. このとき, $\mathbb{Q}$ 上の 2 項関係 $<$ を

$$\frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1 y_2 < x_2 y_1 \quad (16.18)$$

で定める. 右辺はすでに定義されている整数の大小である. 右辺の大小が同値類の代表元の取り方によらずに決まるので (問 16.9), 確かに 2 項関係 $<$ が $\mathbb{Q}$ 上に定義されている. また, (16.18) で $y_1 = y_2 = 1$ とおけばわかるように, $\mathbb{Q}$ に定義した 2 項関係は, その部分集合 $\mathbb{Z}$ に定義されている順序関係を拡張したものである. 次の結果は容易に示される.

定 理 16.11 $(\mathbb{Q}, <)$ は全順序集合であり, $(\mathbb{Z}, <)$ はその部分順序集合である.

■ 順序体 集合 X に加法 $+$, 乗法 $\cdot$, および順序 $<$ が与えられていて, 次の性質をみたすものを順序体という.

- (a) $(X, +, \cdot)$ は体である.
- (b) $(X, <)$ は全順序集合である.
- (c) [演算と順序の関係] $x, y, z \in X$ に対して次が成り立つ.
 - (i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.
 - (ii) $x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

定 理 16.12 $\mathbb{Q}$ は順序体である.

証 明 $\mathbb{Q}$ が (a) を満たすことは定理 16.9 に, (b) を満たすことは定理 16.11 に述べた. (c) は定義と定理 16.8 を用いて容易に示される. ■

問 16.8 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上の 2 項関係 (16.12) が同値関係になることを示せ.

問 16.9 $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}, y_1, y_2, y'_1, y'_2 \in \mathbb{N}$ が $x_1/y_1 = x'_1/y'_1, x_2/y_2 = x'_2/y'_2$ を満たすとき, 次が成り立つことを示せ.

$$x_1 y_2 < x_2 y_1 \Leftrightarrow x'_1 y'_2 < x'_2 y'_1.$$

問 16.10 X を順序体とする. $x, y \in X$ に対して, $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$ を示せ.

16.3 実 数

■ 数直線 ここでは, 点や直線が数学的に何であるかは追求せず, 素朴な幾何学的対象としてとらえておく. 左右に伸びた直線を等間隔に分割し, それぞれの分点に整数を順序よく配置することができる. こうしてできた点を**整数点**という.

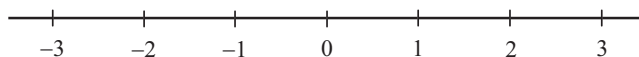


図 16.1: 数直線と整数点

次に, 隣り合う整数点で切り取られる線分を等分割することで, すべての有理数をそのような点と対応させることができる. このようして得られた点を**有理点**という. このとき, 有理数 x, y が $x < y$ を満たせば, x は y の左側に配置される. このように数が配置された直線を**数直線**と呼ぶ.

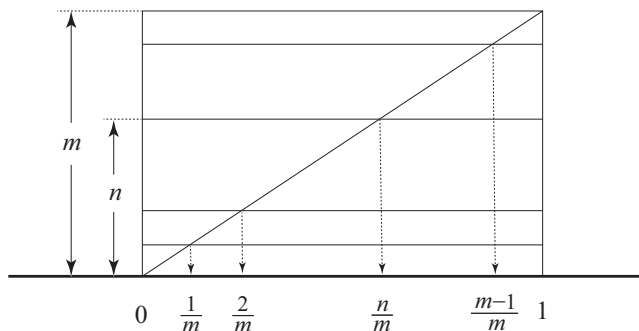


図 16.2: 有理数 n/m の作図

■ 無理数の出現 2つの有理数 $x < y$ の間には, $x < z < y$ を満たす第3の有理

数 z が存在する (このことを有理数は自己稠密であるという). したがって, どんなに近い2つの有理数の間にも, 可算無限個の有理数が存在する. これほどに有理点は直線上に所狭しと並んでいるのだが, それでもなお, 数直線上には有理数に対応しない点が存在するのである. このことは古代ギリシアの頃から知られていた.

ピタゴラスの定理 (または三平方の定理) の最も簡単な応用として, 単位正方形の対角線の長さ x は $x^2 = 2$ を満たすことがわかる. しかし, そのような有理数 x が存在しないことは背理法で簡単に示される (例 1.22). 一方で, 作図によって数直線上に x に相当する点が特定される. つまり, 数直線の各点に数に対応させようとするれば, 有理数だけでは不足し, 無理数が必要になる.²⁾ 似たような例として正三角形の高さや黄金比などがあった.

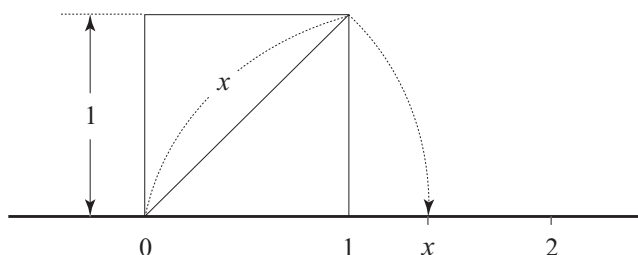


図 16.3: $x^2 = 2$ を満たす数 x の作図

無理数が現れたのは古代ギリシアより遥かに昔の古代メソポタミアである.³⁾ バビロニア数学では2次方程式の解法が知られていたので, 実質的に無理数を扱っていたといえるが近似値で満足していた. 古代ギリシアでも幾何学を通してとらえるにとどまった. 今日から見れば, 無理数の発見は無限への入口であったが, 無限の観念を掘り下げるまでは至らなかったといえる.

²⁾この事実は, 世界は数からできているとするピタゴラス学派 (BC 5 世紀頃) に衝撃を与えた. ピタゴラス学派の人々にとって数は観念的なものではなく, 自然界に実在する可感的物体であったという. この不都合な数をアロゴン (alogon, 口にできない) と名付けてその存在を極秘にしたが, 口外したヒパソスは旅行中に嵐に遭い海で溺れ死んだと伝えられている.

³⁾特に, バビロン第1王朝期 (BC16–19 世紀) に数学や天文学が発展した. 楔形文字を記録した粘土板が多数発掘されており, 数学に係するものは数千に上る. 特に有名なものがプリンプトン 322 であり, 60 進法による数表が刻まれている. これまでにその解釈をめぐるいくつかの説が唱えられてきたが, 近似値ではなく厳密な三角関数表であるという説が最近現れた (2017).

■ **実数論** 直感的には、直線は点が隙間なくつながっている連続体である。有理数はその上にぎっしり詰まってはいるものの、有理数だけでは足りないので、その隙間にも数に対応させて完成する数の体系が実数である。こうして数直線と実数は一体化し、そこに現れる**実数の連続性**は17世紀後半に確立する微分積分の基礎となった。それでもなお、実数そのものに対する基礎付けは曖昧なまま残され、本格的な議論は19世紀後半によりやく始まった。それは、幾何学的直観から離れて、有理数から実数を構成するというものである。ここではデデキントの切断による方法を述べる。ほかにも同値な理論が何通りか知られており、カントルやワイエルシュトラス⁴⁾による実数論も有名である。

■ **デデキントの切断** 全順序集合 $(X, <)$ の部分集合 A, B の対 (A, B) で次をみたすものを X の**切断**という。

- (i) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = X$.
- (ii) $x \in A, y \in B \Rightarrow x < y$.

切断 (A, B) において、 A を下組、 B を上組と呼ぶ。条件 (ii) から $A \cap B = \emptyset$ が得られることに注意しておこう。

では、全順序集合として有理数 $\mathbb{Q}$ を考えよう。有理数 $\mathbb{Q}$ の切断 (A, B) は、下組 A に最大数があるかどうか、上組 B に最小数があるかどうかで4種類に分類される。

	下組 A の最大数	上組 B の最小数
第1種	無	無
第2種	無	有
第3種	有	無
第4種	有	有

まず、第4種の切断は存在しない。実際、 A の最大数を a 、 B の最小数を b とすれば、 $c = (a + b)/2$ は $a < c < b$ を満たす有理数となる。 a, b の取り方から $c \notin A \cup B$ となり、切断の条件 (i) に反する。

⁴⁾Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897). ドイツの数学者。微分積分学や複素関数論などを中心に顕著な貢献があり、とりわけその極めて厳密な解析学的手法で知られる。若い頃は高校教師をしていたが、1856年にベルリン工科大学(現在)に招聘され、1864年にフンボルト大学(現在)の教授となった。

補題 16.13 (A, B) が第2種の切断であれば, 有理数 $a \in \mathbb{Q}$ が一意的に存在して,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq a\} \quad (16.19)$$

となる. 逆に, 任意の有理数 $a \in \mathbb{Q}$ に対して, (16.19) によって A, B を定義すれば (A, B) が第2種の切断になる.

証明 (A, B) を第2種の切断として, $a = \min B$ とおく. $a \in B$ であるから, $x \in A$ とすれば, 切断の性質 (ii) によって $x < a$ である. したがって, $A \subset \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$. もし $x < a$ であって, $x \notin A$ であれば, 切断の性質 (i) によって $x \in B$ となり, $a = \min B$ に反する. よって, $x < a$ ならば必ず $x \in A$ である. こうして, (16.19) の初めの等式が示された. 2番目の等式は補集合を取ればよい. (16.19) を満たす a の一意性と逆の主張は容易である. ■

補題 16.13 と同様に, (A, B) が第3種の切断であれば, 有理数 $a \in \mathbb{Q}$ が一意的に存在して,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\} \quad (16.20)$$

となる. したがって, 第2種の切断と第3種の切断は, 切れ目にある有理数 a を上組に含めるか, 下組に含めるかによって互いに移り合う. この意味で, 第2種の切断と第3種の切断は一対一対応し, さらに補題 16.13 によってそれらは有理数と一対一対応する.

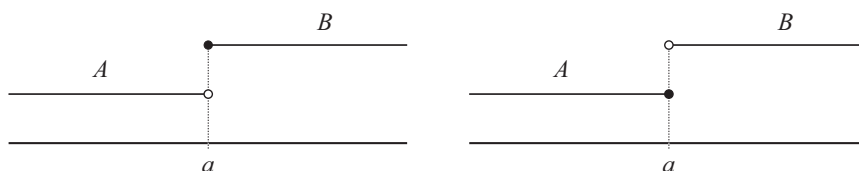


図 16.4: 第2種と第3種の切断

デデキントは第1種の切断が無理数を生み出すと考えた. たとえば, 単位正方形の対角線の長さを利用して,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\},$$

とすると, (A, B) は第1種の切断になる. 第2種や第3種の切断とは異なり, この切断には有理数が対応しない. そこで, 第1種の切断によって数直線上に新しい実数が定まり, それらをすべて集めれば数直線が完成すると考えたのである.

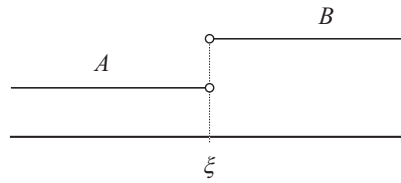


図 16.5: 第1種の切断

第1種の切断の集合を $\mathbb{S}_1$, 第2種の切断の集合を $\mathbb{S}_2$ として,

$$\mathbb{R} = \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$$

とおく. 第2種の切断は有理数と完全に一対一対応することから, $\mathbb{S}_2$ の元を有理数と呼ぶ. これに合わせて, $\mathbb{S}_1$ の元を無理数, そして $\mathbb{R}$ の元を実数と呼ぶ. 第1種または第2種の切断をまとめてデデキントの切断と呼ぶ. こうして, 数直線という幾何学的直観をまったく排除して, 実数がデデキントの切断として定義されたのである. 以下では, 実数を $\xi = (A, B)$ のように書く.

■ 順序 実数 $\xi = (A_1, B_1), \eta = (A_2, B_2) \in \mathbb{R}$ に対して, 2項関係 $\xi \leq \eta$ を $A_1 \subset A_2$ で定義する.

補題 16.14 $(\mathbb{R}, \leq)$ は全順序集合であり, $(\mathbb{Q}, \leq)$ はその部分順序集合である.

証明 2項関係 $\xi \leq \eta$ は集合の包含関係をもとに定義されているので, それが順序関係であることは殆ど自明である. 全順序であることは, 与えられた $\xi = (A_1, B_1), \eta = (A_2, B_2) \in \mathbb{R}$ に対して, $A_1 \not\subset A_2$ ならば $A_2 \subset A_1$ を示せばよい. $A_1 \not\subset A_2$ から, ある $a \in A_1$ で $a \notin A_2$ となるものが存在する. このとき, $a \in B_2$ であるから, 切断の性質 (ii) によって, $x \in A_2$ とすると $x < a$ が成り立つ. したがって, $A_2 \subset \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \subset A_1$ となり, $A_2 \subset A_1$ が導かれた. $\mathbb{R}$

に定義された順序を S_2 に制限したものは $\mathbb{Q}$ の本来の順序に一致することは明らかである. したがって, $(\mathbb{Q}, \leq)$ は $(\mathbb{R}, \leq)$ の部分順序集合である. ■

定理 16.15 (上限の存在) 実数 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S が上に有界であれば上限 $\sup S$ が存在する. つまり, S の上界の集合

$$U(S) = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \text{すべての } \alpha \in S \text{ に対して } \alpha \leq \xi\}$$

が空でなければ, $\min U(S)$ が存在する.⁵⁾

証明 S の元は実数, すなわちデデキントの切断であるから, 下組 A と上組 B の対で表されることを思い出して,

$$\tilde{A} = \bigcup_{(A,B) \in S} A, \quad \tilde{B} = \mathbb{Q} \setminus \tilde{A} = \bigcap_{(A,B) \in S} B \quad (16.21)$$

とおく. このとき, $\gamma = (\tilde{A}, \tilde{B})$ がデデキントの切断になることがわかり, $\gamma \in \mathbb{R}$ となる. では, $\gamma \in U(S)$ を示そう. 実際, $\alpha = (A, B) \in S$ であれば, (16.21) によって, $A \subset \tilde{A}$ であり, これは $\alpha \leq \gamma$ を意味する. 次に, $\gamma = \min U(S)$ を示す. 実際, $\xi = (C, D) \in U(S)$ とすると, すべての $\alpha = (A, B) \in S$ に対して $A \subset C$ であるから, $\tilde{A} \subset C$ が成り立つ. これは, $\gamma \leq \xi$ を意味し, $\gamma = \min U(S)$ がわかる. ■

同じ全順序集合であっても $(\mathbb{Q}, <)$ は定理 16.15 に述べた性質をもたない. それは第 1 種の切断が存在することからわかる. つまり, 第 1 種の切断 (A, B) を考えると, A は $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合であって, 上に有界であるが, 上限は存在しない. つまり, 定理 16.15 に述べた上限の存在は実数に特徴的な性質であり, 後で述べるように, 上限の存在は実数の連続性と同値なのである.

■ **切断の簡略表記** これまでは, 実数を $\xi = (A, B)$ のように切断の下組 A と上組 B の対で表してきた. しかしながら, この記法はいささか冗長である. 切断の定義によって下組 A と上組 B は互いに補集合だから, 下組だけ (あるいは上組だけ) を用いて議論が閉じるはずである. そこで, 有理数 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A がデデキントの切断の下組になるための判定条件を用意しておこう.

⁵⁾ 定義によって, $\sup S = \min U(S)$ である. 第 12.1 節を見よ.

16.3. 実数

253

補題 16.16 部分集合 $A \subset \mathbb{Q}$ に対して, (A, A^c) が $\mathbb{Q}$ のデデキントの切断になるための必要十分条件は次の (i)–(iii) が成り立つことである.

- (i) $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$.
- (ii) $a \in A, x < a \Rightarrow x \in A$.
- (iii) すべての $a \in A$ に対して, $a < x$ を満たす $x \in A$ が存在する.

問 16.11 補題 16.16 を証明せよ.

■ **加法** 有理数の加法を切断を用いて表して実数の加法を導入する.

補題 16.17 実数 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 対応する切断の下組を A_1, A_2 とする. このとき,

$$A = \{x + y \mid x \in A_1, y \in A_2\} \quad (16.22)$$

はデデキントの切断の下組である.

証明 補題 16.16 の条件を確かめればよい. まず, (i) は明らかである.

(ii) $a \in A, x < a$ とする. 定義 (16.22) から, ある $y_1 \in A_1, y_2 \in A_2$ を用いて $a = y_1 + y_2$ と表される. $b = (a - x)/2$ とおくと $x = (y_1 - b) + (y_2 - b)$ が成り立つ. ここで, $b > 0$ であるから, $y_1 - b \in A_1, y_2 - b \in A_2$ である. したがって, $x \in A$ がわかる.

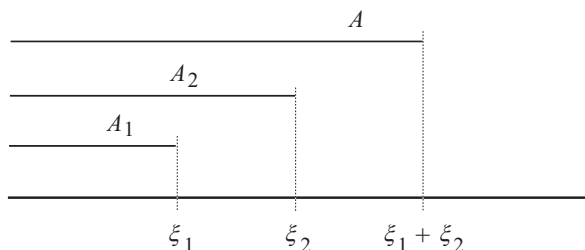
(iii) $a \in A$ として, (ii) と同様に $a = y_1 + y_2$ と表しておく. $y_1 \in A_1$ であるから補題 16.16 (iii) によって, $z_1 > y_1$ を満たす $z_1 \in A_1$ が存在する. 同様に, $z_2 > y_2$ を満たす $z_2 \in A_2$ が存在する. そうすると, $z = z_1 + z_2$ は定義によって A に属し, $a = y_1 + y_2 < z_1 + z_2 = z$ が得られる. ■

補題 16.17 の A をもって実数 $\mathbb{R}$ の加法 $\xi_1 + \xi_2$ を定義する. これが結合法則と交換法則を満たすことは, 定義に戻って簡単に示される. この加法の単位元は, 有理数 0 に対応するデデキントの切断 $((-\infty, 0), [0, \infty))$ で与えられる. 逆元については次の問のとおりである.

問 16.12 $\xi \in \mathbb{R}$ に対応する切断の下組を A として,

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid \text{ある } y > 0 \text{ が存在して } -x - y \notin A\}$$

とおく. C はデデキントの切断の下組となり, それに対応する実数を η とすれば $\xi + \eta = 0$ となることを示せ.

図 16.6: 実数の加法 $\xi_1 + \xi_2$

こうして, $(\mathbb{R}, +)$ は加法群になる. さらに, この演算を $\mathbb{Q}$ に制限したものが $\mathbb{Q}$ の本来の加法に一致することが次の補題 16.18 からわかる.

補題 16.18 有理数 a_1, a_2 に対応するデデキントの切断の下組を A_1, A_2 とするとき, 次が成り立つ.

$$\{x + y \mid x \in A_1, y \in A_2\} = \{z \in \mathbb{Q} \mid z < a_1 + a_2\}.$$

問 16.13 補題 16.18 を証明せよ.

■ **乗法** 基本的なアイデアは加法と同様である. 有理数 $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ とすでに定義されている $a_1 a_2$ に対応する第 2 種の切断の下組をそれぞれ A_1, A_2, A として, A を A_1 と A_2 を用いて表すことで, 実数の乗法が定義される.

まず, 正の実数 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 対応する切断の下組を A_1, A_2 とする. このとき, $A_1^+ = A_1 \cap [0, +\infty)$ とおくと $A_1^+ \neq \emptyset$ である. A_2^+ も同様である. ここで, $\mathbb{Q}$ の部分集合 A を

$$A = \{xy \mid x \in A_1^+, y \in A_2^+\} \cup (-\infty, 0) \quad (16.23)$$

で定義する. 補題 16.16 の条件を確かめることで, (16.23) がデデキントの切断の下組になることがわかる. これに対応する実数を $\xi_1 \xi_2$ で定義する.

実数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|\xi| = \max\{\xi, -\xi\} = \begin{cases} \xi, & \xi \geq 0, \\ -\xi, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

を ξ の絶対値という. 定義から, $|0| = 0$ である. さらに, 三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (16.24)$$

が成り立つ. 実際, 絶対値の定義から $\pm x \leq |x|$, $\pm y \leq |y|$ である. 両辺を加えて, $\pm(x + y) \leq |x| + |y|$ が得られ, $|x + y| \leq |x| + |y|$ がわかる.

一般の実数 ξ_1, ξ_2 の積は絶対値を用いて,

$$\xi_1 \xi_2 = \begin{cases} |\xi_1| \cdot |\xi_2|, & \xi_1 > 0, \xi_2 > 0 \text{ または } \xi_1 < 0, \xi_2 < 0 \text{ のとき,} \\ -|\xi_1| \cdot |\xi_2|, & \xi_1 > 0, \xi_2 < 0 \text{ または } \xi_1 < 0, \xi_2 > 0 \text{ のとき,} \\ 0, & \xi_1 = 0 \text{ または } \xi_2 = 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

のように定義する. こうして, 実数 $\mathbb{R}$ には加法と乗法が定義され, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ が体になることが示される. これを実数体という. 有理数体 $\mathbb{Q}$ は第2種の切断として $\mathbb{R}$ の部分集合であるが, それ自身が体である. ここに順序も合わせて, 次の結論が得られる.

定理 16.19 $\mathbb{R}$ は順序体であり, $\mathbb{Q}$ はその部分順序体である.

■ **実数の連続性** デデキントは有理数の切断というアイデアで, 数直線上にあって有理数が対応しない点に対しても実数を対応させることに成功した. 数直線という幾何学的描像が背後にあるものの, そのような直感は議論から一切排除されているところが重要である. では, デデキントの議論から「数直線」という描像がどのように復元されるのだろうか. 直感的であるが, 数直線のもつ最も基本的な性質として連続性がある. 最後に, 連続性を組み込むことで, デデキントの実数論は完成する.

定理 16.20 (デデキントの連続性定理) 実数体 $\mathbb{R}$ の任意の切断 (A, B) に対して, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ.

$$x \in A \Rightarrow x \leq a, \quad y \in B \Rightarrow y \geq a.$$

証明 (A, B) を $\mathbb{R}$ の切断とする. B の任意の元は A の上界であるから, A は $\mathbb{R}$ の上に有界な空でない部分集合となる. したがって, 定理 16.15 から A には上限 $a = \sup A$ が存在する. すなわち, 下組 A の上界の全体を $U(A)$ とすれ

ば, $U(A)$ には最小元が存在して $a = \min U(A)$ となる. 特に, $a \in U(A)$ であるから, 任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ となる. 一方, すべての B の元は A の上界なので, $B \subset U(A)$ である. したがって, 任意の $y \in B$ は $y \geq a$ を満たす. ■

有理数の切断と比べるとよい. 有理数の場合, 第1種の切断によって有理数に触れることなく下組と上組に分割することができた. デデキントの連続性定理の主張するところは, 実数に対してはそのような切断はできず, 必ず切れ目に実数が存在するということである. これが正しく実数の連続性である. 直線は連続体であるという直感に対して数学的基礎付けができたのである.

定理 16.20 に示した実数体の性質を取り出して, 任意の順序体 X に対する公理の形で述べ直しておこう.

デデキントの連続性公理 任意の切断 (A, B) に対して, ある $a \in X$ が存在して, $x \in A \Rightarrow x \leq a$ と $y \in B \Rightarrow a \leq y$ が成り立つ.

定理 16.21 順序体 X がデデキントの連続性公理を満たすための必要十分条件は, 上に有界な空でない任意の部分集合 $A \subset X$ に上限が存在することである.

十分性については, 定理 16.20 の証明を見直せばよい. 必要性も難しくない. そうすると, 定理 16.15 を実数の連続性の言い換えとして扱ってよい.

■ **極限** 実数の連続性は極限を扱うための基礎であり, ひいては微積分の基礎として極めて重要である. しかしながら, 極限を系統的に議論するには位相という概念が必要になり, 本書の範囲を超えてしまう. ここでは最も基本的な性質を述べるにとどめて, より詳しい議論は微積分の教科書に譲ることにする.

実数列 $x_1, x_2, \dots$ がある実数 a に収束するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, すべての $n \geq N$ に対して $|x_n - a| < \epsilon$ が成り立つことをいう. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

と書き, a を実数列 $x_1, x_2, \dots$ の極限值という. 極限值は一意的に定まる.

次の2つの定理は極限値の存在を保証する基本的な結果であるが, その抛り所が実数の連続性なのである.

定理 16.22 (有界な単調列の収束) 上に有界な単調増加列は収束する. また, 下に有界な単調減少列は収束する.

証明 後半は, 与えられた単調減少列の (-1) 倍を取れば前半に帰着する. そこで, 前半を証明する. $x_1, x_2, \dots$ を上に有界な単調増加列とする. それらのなす集合を $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ とおくと, 仮定から S は上に有界な $\mathbb{R}$ の空でない部分集合になる. そうすると, 定理 16.15 によって, $a = \sup S$ が存在する. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ を示そう. S の上界の集合を $U(S)$ とすると, $\min U(S) = a$ である. さて, 任意の $\epsilon > 0$ をとる. $a - \epsilon \notin U(S)$ であるから, ある自然数 N が存在して $x_N > a - \epsilon$ となる. 実数列 $x_1, x_2, \dots$ は単調増加なので, $n \geq N$ を満たすすべての自然数に対して

$$x_n > a - \epsilon, \quad n \geq N, \quad (16.25)$$

となる. 一方, $\min U(S) = a$ であるから, 特に $a \in U(S)$ である. したがって, すべての n に対して, $x_n \leq a$ である. これと (16.25) を合わせると,

$$0 \leq a - x_n < \epsilon, \quad n \geq N,$$

となる. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ を意味する. ■

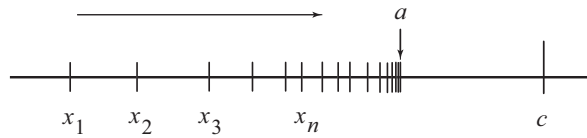


図 16.7: 有界な単調増加列の収束

定理 16.23 (区間縮小法の原理) 2 つの実数列 $x_1, x_2, \dots$ と $y_1, y_2, \dots$ が次の 2 条件を満たすものとする.

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

このとき, 2 つの実数列 $x_1, x_2, \dots$ と $y_1, y_2, \dots$ は同じ極限値に収束する. つまり, ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

証明 まず, 実数列 $x_1, x_2, \dots$ は上に有界な単調増加列なので, 定理 16.22 によって収束する. 実数列 $y_1, y_2, \dots$ についても同様であるから,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

とおく. $a = b$ を示せばよい. 三角不等式によって,

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - x_n) + (x_n - y_n) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |x_n - y_n| + |y_n - b| \end{aligned} \quad (16.26)$$

が成り立つ. さて, 任意の $\epsilon > 0$ をとる. 実数列 $x_1, x_2, \dots$ の極限値が a であるから, ある自然数 N_1 が存在して, すべての $n \geq N_1$ に対して $|x_n - a| < \epsilon$ が成り立つ. 同様に, 別の自然数 N_2 が存在して, すべての $n \geq N_2$ に対して $|y_n - b| < \epsilon$ が成り立つ. さらに, 仮定 (ii) から自然数 N_3 が存在してすべての $n \geq N_3$ に対して $0 \leq y_n - x_n < \epsilon$ が成り立つ. そこで $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とすれば, すべての $n \geq N$ に対して,

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon, \quad |y_n - x_n| < \epsilon, \quad n \geq N$$

が同時に成り立ち, (16.26) の右辺は $< 3\epsilon$ となる. したがって,

$$0 \leq |a - b| < 3\epsilon \quad (16.27)$$

が得られる. $\epsilon \in \mathbb{R}$ は $\epsilon > 0$ を満たす限り任意であったから, (16.27) が成り立つのは $a = b$ に限る. これが示したかったことである. ■

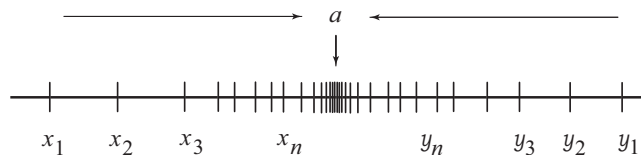


図 16.8: 区間縮小法の原理

■ 実数の無限小数展開 実数 $x \in \mathbb{R}$ の整数部分が

$$\lfloor x \rfloor = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$$

16.3. 実数

259

で定義される. 右辺の集合は上に有界な空でない整数の部分集合なので最大数を含むことを用いている (問 16.7).

与えられた実数 x に対して, まず,

$$y_0 = x, \quad \xi_0 = \lfloor y_0 \rfloor$$

とおく. このとき, $0 \leq y_0 - \xi_0 < 1$ であるから,

$$y_1 = 10(y_0 - \xi_0), \quad \xi_1 = \lfloor y_1 \rfloor$$

とおくと, $0 \leq y_1 < 10$, $\xi_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ となる. 帰納的に y_n と ξ_n を

$$y_{n+1} = 10(y_n - \xi_n), \quad \xi_{n+1} = \lfloor y_{n+1} \rfloor, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (16.28)$$

で定義する. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq y_n < 10$, $\xi_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ となることが数学的帰納法で示される. ここで, 実数列を

$$x_0 = \xi_0, \quad x_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{10^k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (16.29)$$

で定義する. このとき,

$$y_{n+1} = 10^{n+1}(x - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

が成り立つことが数学的帰納法で証明できる. そうすると, (16.29) から

$$0 \leq x - x_n = \frac{y_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}$$

となるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

が得られる. これを

$$x = \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n} \quad (16.30)$$

と書いて, 実数 x の無限小数展開という. 特に, $x > 0$ のときは, (16.30) の右辺を

$$x = \xi_0.\xi_1\xi_2\cdots\xi_n\cdots$$

のように書く.

無限小数展開 (16.30) を有限で切った x_n は有理数 (10 進有理数) であるから, すべての実数 x は単調増加する有理数で下から近似されることがわかる. $-x$ について同様に考えれば, x を上から近似することもできる.

定理 16.24 任意の実数 a に対して, 有理数列 $x_1, x_2, \dots$ と $y_1, y_2, \dots$ で次の 2 つの性質を満たすものが存在する.

$$(i) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq a \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0.$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ が成り立つ.

■ p 進法による展開 (16.28) の係数 10 を任意の自然数 $p \geq 2$ で置き換えて同様の議論をすれば, 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ を

$$x = \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{p^n}, \quad \xi_0 \in \mathbb{Z}, \quad \xi_1, \xi_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\},$$

のように表すことができる. これは x の小数点以下を p 進法によって無限小数展開したものである.

■ アルキメデスによる円周率の計算 アルキメデス⁶⁾は円を正多角形で内側と外側から近似して円周率の近似値を求めた. 実際, 正 96 角形の周長から円周率が

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

を満たすことを導いた. これは $3.1408 \dots < \pi < 3.1428 \dots$ を意味する. 当時, 三角関数はおろか文字式さえ確立していなかったことを考えると驚異と言うしかない. 単位円に内接する正 n 角形の周長を a_n , 外接する正 n 角形の周長を b_n とすれば, 図形的な考察によって

$$a_3 < a_4 < \dots < 2\pi < \dots < b_4 < b_3$$

がわかる. a_n と b_n の差が n とともにいくらでも小さくなることから n を十分大きくとれば, 究極的には π が求まる. これがアルキメデスの計算の根拠であり, 区間縮小法の端緒といえる史実である.⁷⁾

⁶⁾Archimedes (BC287?-212) 古代ギリシアの最大級の学者の 1 人. 円周率以外にも, 放物線が囲む面積, 球や円錐の体積や表面積などさまざまな求積公式も導出した.

⁷⁾三角関数を用いれば, $a_n = 2n \sin \pi/n$, $b_n = 2n \tan \pi/n$ となる. 適当な n をとって三角関数を計算すれば, π の近似値が得られる. 今となつては全く単純な問題であるが, これを三角関数なしに実行することは至難であろう. 円周率の歴史については [43] などが参考になる.

16.3. 実数

261

■ 実数体の特徴づけ 有理数体 $\mathbb{Q}$ も実数体 $\mathbb{R}$ もともに順序体であるが, 前者はデデキントの連続性公理を満たさず, 後者は満たす. この観点から, 実数体が特徴づけられる.

定理 16.25 デデキントの連続性公理をみたす順序体は同型を除いてただ 1 つだけ存在する.

証明の方針だけ述べる. まず, 任意の順序体 X は有理数体 $\mathbb{Q}$ と同型な部分体 K を含むことを示す. つまり, 乗法の単位元 1 を n 個加えることから始めて, 自然数 $\mathbb{N}$, 整数 $\mathbb{Z}$ そして有理数 $\mathbb{Q}$ から X への演算を保つ単射をつくる. 次に, 連続性公理を用いて, 任意の $x \in X$ に対して K から近似列をとり, 極限同志を対応付けて $\mathbb{R}$ から X の上への順序体としての同型写像をつくる.

問 16.14 順序体 X において, 上に有界な空でない任意の部分集合が上限をもつとする. 任意の $x \in X$ に対して $x < n1 = 1 + \cdots + 1$ (n 個の和) を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ (この性質をアルキメデス性という).