2003 年 (平成 15 年) 度後期

解析学 B : 問題と解説

大学院情報科学研究科
尾畑 伸明（担当教官）

はじめに 2003 年度後期に開講した工学部 1 年生向「微分積分学」で出題したレポート問題・小テスト・期末試験とその解説を掲載する。

教科書 : 岡安隆照ほか「微分積分学入門」裳華房

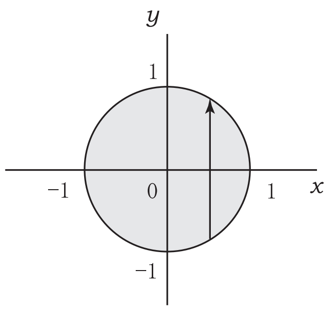
1 次の重積分を累次積分に変換して計算せよ. ただし, D の形状を図示し, どのように累次積分に変換したかを明示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy \qquad D=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y^2)dxdy \qquad D=\{(x,y)\,;\,y-1\le x\le y+1,\ 0\le y\le 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x^y dxdy \qquad D=\{(x,y)\,;\,0\le x\le 1\,,\ a\le y\le b\} \quad (-1<a<b)$

解説 (1) 出題者の勘違いによって, x,y による累次積分で計算することは困難であった. x の変域は $-1\le x\le 1$. x を固定するとき, y の変域は $-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$.



よって,

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy\right)dx.$$

x,y の対称性によって, x,y の順序を変えても同様の式であり,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy=2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy$$

の計算に帰着する. この計算は困難である. 実際,

$$\int \sin(x^2)\,dx$$

は初等関数で表せない.

[極座標による計算] 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって, D は

$$E = \{(r,\theta)\,;\, 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

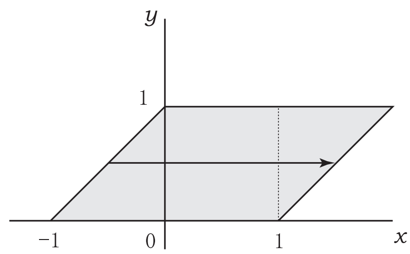
となる. よって

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy = \iint_E \sin(r^2)\,rdrd\theta$$

これは累次積分できる.

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sin(r^2)\,rdr\right)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\left[-\frac{\cos(r^2)}{2}\right]_0^1 = \pi(1-\cos 1).$$

(2) y を固定して, 先に x で積分するのがよい. y の変域は, $0 \le y \le 1$ であり, y をとめるごとに x は$y-1 \le x \le y+1$ のように変化する.



よって,

$$\iint_D (x+y^2)dxdy = \int_0^1 dy\int_{y-1}^{y+1}(x+y^2)dx = \int_0^1 dy\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{x=y-1}^{x=y+1}$$

$$= \int_0^1 (2y+2y^2)\,dy = \left[y^2+\frac{2}{3}\,y^3\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

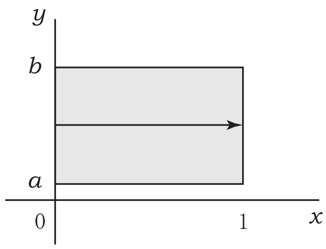
[注意] もちろん, y で先に積分してもよい. そのときは, 図形の形状から積分を 3 つに分割する必要がある (試みよ).

(3) 標準的な長方形 D 上の積分であるが, y を固定して, 先に x で積分するのがよい.

$$\iint_D x^y dxdy = \int_a^b\left(\int_0^1 x^y dx\right)dy = \int_a^b dy\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = [\log(y+1)]_a^b$$

$$= \log(b+1) - \log(a+1) = \log\frac{b+1}{a+1}.$$



[注意] これを, x を固定して, 先に y で積分しようとすると,

$$\iint_D x^y dxdy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \log x} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 dx \left[\frac{e^{y \log x}}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_0^1 \left(\frac{e^{b \log x} - e^{a \log x}}{\log x} \right) dx$$

ここで, $t = \log x$ とおけば, $dt = \dfrac{dx}{x}$, つまり,

$$dx = xdt = e^t dt.$$

よって,

$$= \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \right) e^t dt = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(b+1)t} - e^{(a+1)t}}{t} dt$$

となるが, 行き詰まる.

関連問題 上の問題 1(3) において 2 通りの累次積分を比較することによって,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

を導け.

関連問題 次の重積分を累次積分に変換して計算せよ. ただし, D の形状を図示し, どのように累次積分に変換したかを明示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy \qquad D = \{(x, y)\,;\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}\ (a > 0,\ b > 0)$

(2) $\displaystyle\iint_D xy \sin(x^2 + y^2) dxdy \qquad D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \le 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D xy \sin(x^2 + y^2) dxdy \qquad D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

(4) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y) dxdy \qquad D = \{(x, y)\,;\, |x| + |y| \le 2\}$

[答] (1) $\dfrac{ab}{3}(a^2+b^2)$　(2) 0　(3) $\dfrac{1}{4}(\sin 1-\cos 1)$　(4) $\dfrac{16}{3}$

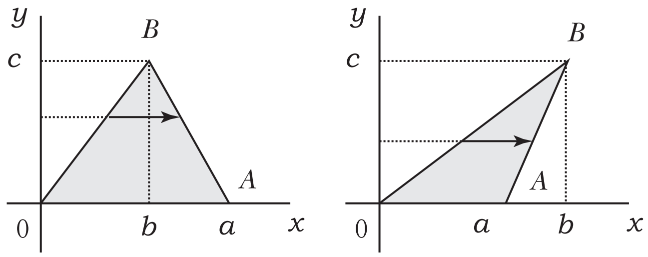
2　領域 D に対して, $A(D)$, (x_0, y_0) を次のように定義する:

$$A(D)=\iint_D dxdy,\qquad x_0=\frac{1}{A(D)}\iint_D xdxdy,\qquad y_0=\frac{1}{A(D)}\iint_D ydxdy$$

(1) D が $(0,0)$, $(a,0)$, (b,c) を 3 頂点とする 3 角形のとき, (x_0, y_0) はその 3 角形の重心に一致することを示せ.

(2) D が 一般の位置にある 3 角形でも, (x_0, y_0) はその 3 角形の重心に一致することを示せ.

解説 (1) 各頂点を $O=(0,0)$, $A=(a,0)$, $B=(b,c)$ とおこう. まず, $a>0$, $b>0$, $c>0$ の場合を考える. a, b の大小関係によって, 3 角形の形状は図のようになる:



直線の方程式は,

$$OB: x=\frac{b}{c}\,y,\qquad AB: x=\frac{b-a}{c}\,y+a$$

いずれの形状であっても, x で先に積分するなら同じことである.

$$\begin{aligned}
A(D)&=\iint_D dxdy=\int_0^c dy\int_{\frac{b}{c}y}^{\frac{b-a}{c}y+a}dx=\int_0^c\left(\left(\frac{b-a}{c}y+a\right)-\frac{b}{c}y\right)dy\\
&=\int_0^c\left(-\frac{a}{c}y+a\right)dy=\left[-\frac{a}{2c}y^2+ay\right]_0^c\\
&=-\frac{a}{2c}\,c^2+ac=\frac{ac}{2}
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\iint_D x dxdy = \int_0^c dy \int_{\frac{b}{c}y}^{\frac{b-a}{c}y+a} x dx = \int_0^c \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\frac{b-a}{c}y+a\Big)^2 - \Big(\frac{b}{c}y\Big)^2\Bigg)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^c \Bigg(-2\Big(\frac{a}{c}y-a\Big)\frac{b}{c}y + \Big(\frac{a}{c}y-a\Big)^2\Bigg)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^c \Bigg(\frac{a^2-2ab}{c^2}y^2 + \frac{2ab-2a^2}{c}y + a^2\Bigg)dy$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{a^2-2ab}{c^2}\frac{c^3}{3} + \frac{2ab-2a^2}{c}\frac{c^2}{2} + a^2c\Bigg) = \frac{ac(a+b)}{6}.$$

また,

$$\iint_D y dxdy = \int_0^c dy \int_{\frac{b}{c}y}^{\frac{b-a}{c}y+a} y dx = \int_0^c \Bigg(\Big(\frac{b-a}{c}y+a\Big) - \frac{b}{c}y\Bigg) y dy$$

$$= \int_0^c \Big(-\frac{a}{c}y^2 + ay\Big)dy = -\frac{a}{c}\frac{c^3}{3} + a\frac{c^2}{2} = \frac{ac^2}{6}.$$

よって,

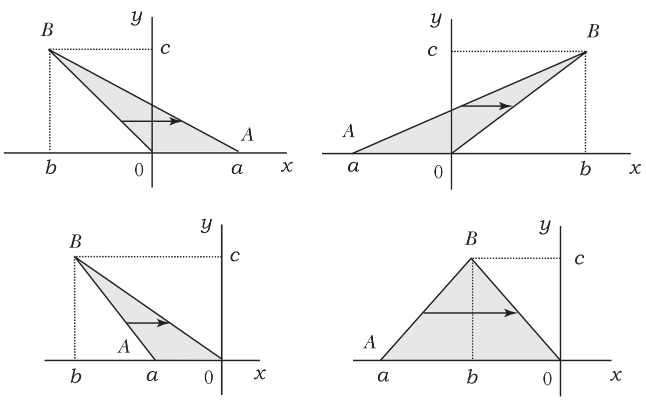
$$x_0 = \frac{ac(a+b)}{6}\Big/\frac{ac}{2} = \frac{a+b}{3}, \qquad y_0 = \frac{ac^2}{6}\Big/\frac{ac}{2} = \frac{c}{3}.$$

3 角形の重心 G は

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

を満たすので, 座標で表示すれば, $G = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. これは, 上の (x_0, y_0) に一致する.

$a > 0$, $b > 0$ と限らない場合は, さらに次の形状がある: 最後に, $c < 0$ の場合がある. こ



れらについても同様の計算が可能であり, 同じ結果が得られる. これらすべての場合を尽くして初めて完全な解答となる. ただし, 同じ計算を繰り返さない理由付けもできる. ((2) を参考に考えよ.)

(2) (a) 一般の位置にある 3 角形を座標で表し, 直接計算するのもよいがやや面倒.

(b) 一般の位置にある 3 角形を両軸に平行な直線で分割し, (1) が利用できる複数の三角形に分けて積分を計算する (これは上手い!).

(c) 積分の変換を考察する. リーマン和に戻って考えれば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x+a, y+b)dxdy,$$

D' : D を (a,b) だけ平行移動したもの

が成り立つ. 座標軸を回転させてリーマン和を考えれば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)dxdy,$$

D' : D を θ だけ回転したもの

も成り立つ. そこで, 一般の位置にある 3 角形を平行移動して, 1 つの頂点を原点と一致させ, 次に回転によって, (1) のような位置にセットする. そのような 3 角形に対して (x_0, y_0) は 3 角形の重心である. 求めるべき積分の値は, (x_0, y_0) に逆回転と逆の平行移動を施せば得られる. しかし, 3 角形の重心は平行移動と回転によって不変であるから, 一般の位置にある 3 角形に対して計算した (x_0, y_0) はその 3 角形の重心を表す.

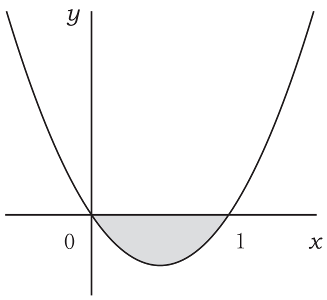
[注意]「3 角形を平行移動したとき, 重心も同じだけ平行移動される」こと (初等幾何) は証明に用いたが, それだけでは解答にならない. 積分値がどのように変化するかをあわせて考えなければならない.

3　問題 2 の $A(D)$, (x_0, y_0) を次の D に対して計算せよ.

(1) D は $y = x(x-1)$ と $y = 0$ で囲まれた有界閉領域

(2) D は $y = \sin x$, $y = 0$, $x = a$ で囲まれた有界閉領域 $(0 < a < 2\pi)$

解説 (1) 計算するのみ.



$$A(D) = \int_0^1 dx \int_{x(x-1)}^0 dy = \int_0^1 -x(x-1)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$\iint_D x dxdy = \int_0^1 dx \int_{x(x-1)}^0 x dy = \int_0^1 -x^2(x-1)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$\iint_D y dxdy = \int_0^1 dx \int_{x(x-1)}^0 y dy = \int_0^1 -\frac{x^2(x-1)^2}{2}dx = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = -\frac{1}{60}.$$

よって,

$$A(D) = \frac{1}{6}, \qquad x_0 = \frac{1}{2}, \qquad y_0 = -\frac{1}{10}.$$

(2) (case 1) $0 < a \leq \pi$ の場合.

$$A(D) = \int_0^a dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^a \sin x\, dx = [-\cos x]_0^a = 1 - \cos a.$$

また,

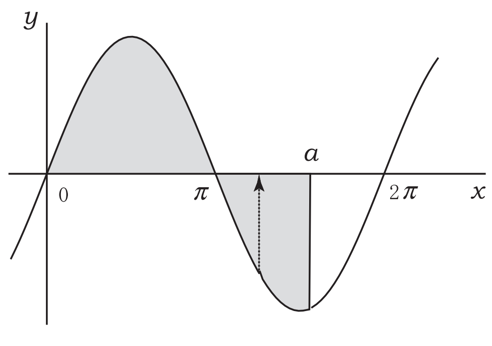
$$\begin{aligned}\iint_D x dxdy &= \int_0^a dx \int_0^{\sin x} x dy = \int_0^a x \sin x\, dx \\ &= [-x\cos x]_0^a + \int_0^a \cos x\, dx = -a\cos a + [\sin x]_0^a = -a\cos a + \sin a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D y dxdy &= \int_0^a dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^a \frac{\sin^2 x}{2}\, dx \\ &= \int_0^a \frac{1-\cos 2x}{4}\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^a = \frac{2a - \sin 2a}{8}.\end{aligned}$$

よって,

$$A(D) = 1 - \cos a, \qquad x_0 = \frac{-a\cos a + \sin a}{1 - \cos a}, \qquad y_0 = \frac{2a - \sin 2a}{8(1-\cos a)}.$$

(case 2) $\pi < a < 2\pi$ の場合.



$$\begin{aligned}A(D) &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy + \int_\pi^a dx \int_{\sin x}^0 dy = \int_0^\pi \sin x\, dx + \int_\pi^a (-\sin x)\, dx \\ &= [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^a = 3 + \cos a\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} x\,dy + \int_\pi^a dx \int_{\sin x}^0 x\,dy \\ &= \int_0^\pi x\sin x\,dx + \int_\pi^a (-x\sin x)dx \\ &= \left\{[-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx\right\} - \left\{[-x\cos x]_\pi^a + \int_\pi^a \cos x\,dx\right\} \\ &= \{\pi + [\sin x]_0^\pi\} - \{-a\cos a - \pi + [\sin x]_\pi^a\} \\ &= 2\pi + a\cos a - \sin a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y\,dy + \int_\pi^a dx \int_{\sin x}^0 y\,dy \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2}\,dx + \int_\pi^a -\frac{\sin^2 x}{2}\,dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{4}\,dx + \int_\pi^a \frac{-1+\cos 2x}{4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\left[-x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_\pi^a \\ &= \frac{1}{4}\left[\pi + \left(-a + \frac{\sin 2a}{2} + \pi\right)\right] = \frac{4\pi - 2a + \sin 2a}{8}.\end{aligned}$$

よって,

$$A(D) = 3 + \cos a, \qquad x_0 = \frac{2\pi + a\cos a - \sin a}{3 + \cos a}, \qquad y_0 = \frac{4\pi - 2a + \sin 2a}{8(3+\cos a)}.$$

[お詫び] 問題文が曖昧なため, D がどの領域をさすのか考えようによってはいろいろあった. 解答では, $0 \le x \le a$ の範囲をとった.

[注意] (case 2) において

$$A(D) = \int_0^a dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^a \sin x\,dx = [-\cos x]_0^a = 1 - \cos a$$

とするのはは間違いである! なぜか?よく考えよ.

4 $D = \{(x,y)\,;\,(x-2)^2 + y^2 \le 4\}$ 上の積分

$$I_n = \iint_D (x^n + y^n)dxdy, \quad n \ge 1, \qquad I_0 = 2\iint_D dxdy,$$

を考える.

(1) 極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって領域 D を表示したい. 角度の変域を $0 \le \theta \le 2\pi$ ととるとして, D に対応する (r,θ)-平面の領域 E を図示せよ.

(2) (1) と同様の極座標であるが, 角度の変域を $-\pi \le \theta \le \pi$ ととるとき, D に対応する (r,θ)-平面の領域 F を図示せよ.

(3) 積分 I_n を計算し, n の簡潔な式で表せ.

解説 (1) $(x-2)^2 + y^2 \le 4$ に極座標を代入して

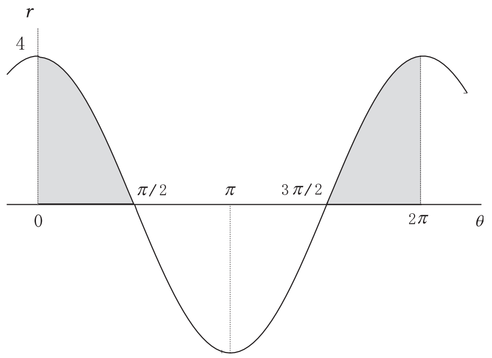
$$(r\cos\theta - 2)^2 + r^2\sin^2\theta \le 4.$$

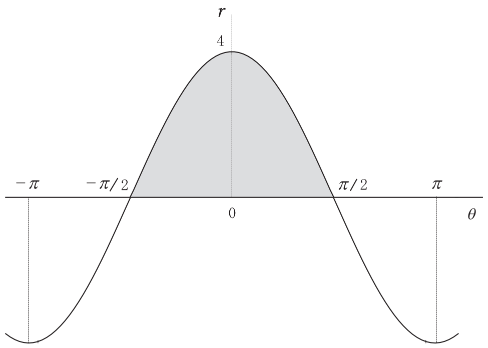
$r \ge 0$ に注意して整理すれば, $0 \le r \le 4\cos\theta$. これが E を表す不等式である. よって,

$$E = \{(r,\theta)\,;\,0 \le r \le 4\cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

(2) 不等式は (1) と同じ. θ の変域のみが異なる.

$$F = \{(r,\theta)\,;\,0 \le r \le 4\cos\theta,\ -\pi \le \theta \le \pi\}.$$





(3) (2) の領域 F を用いて計算しよう.

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_F \{(r\cos\theta)^n + (r\sin\theta)^n\}\, rdrd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^{n+1}(\cos^n\theta + \sin^n\theta)dr \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^{n+2}}{n+2}\right]_0^{4\cos\theta} (\cos^n\theta + \sin^n\theta)d\theta \\
&= \frac{4^{n+2}}{n+2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^{2n+2}\theta + \sin^n\theta\cos^{n+2}\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

ここで, n の偶奇によって場合分けをする.

(n が奇数のとき) $n = 2m-1$ とおく.

$$I_{2m-1} = \frac{4^{2m+1}}{2m+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^{4m}\theta + \sin^{2m-1}\theta\cos^{2m+1}\theta)d\theta$$

において, $\cos^{4m}\theta$ は偶関数, $\sin^{2m-1}\theta\cos^{2m+1}\theta$ は奇関数になるので,

$$I_{2m-1} = \frac{2\times 4^{2m+1}}{2m+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{4m}\theta\,d\theta. \tag{4.1}$$

(n が偶数のとき) $n = 2m$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{4^{2m+2}}{2m+2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^{4m+2}\theta + \sin^{2m}\theta\cos^{2m+2}\theta)d\theta \\ &= \frac{2\times 4^{2m+2}}{2m+2}\int_0^{\pi/2}(\cos^{4m+2}\theta + \sin^{2m}\theta\cos^{2m+2}\theta)d\theta \end{aligned} \tag{4.2}$$

いずれの場合も,

$$J_{m,n} = \int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx = \frac{m!(2m-1)!!(2n-1)!!}{2^{n+1}(m+n)!(2m)!!\pi}, \tag{4.3}$$

を用いることができる. ただし,

$$\begin{aligned} &(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1, \\ &(2n)!! = (2n)(2n-2)\ldots 4\cdot 2, \qquad 0!! = (-1)!! = 1. \end{aligned}$$

$n = 2m-1$ のときは, (4.1) は,

$$I_{2m-1} = \frac{2^{4m+3}}{2m+1}J_{0,2m} = \frac{2^{4m+3}}{2m+1}\frac{(4m-1)!!\pi}{2^{2m+1}(2m)!} = \frac{2^{2m+2}(4m-1)!!\pi}{\pi(2m+1)!}$$

となる. 同様に, $n = 2m$ のときは, (4.2) は,

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2^{4m+5}}{2m+2}(J_{0,2m+1} + J_{m,m+1}) \\ &= \frac{2^{4m+5}}{2m+2}\left(\frac{(4m+1)!!\pi}{2^{2m+2}(2m+1)!} + \frac{m!(2m-1)!!(2m+1)!!\pi}{2^{m+2}(2m+1)!(2m)!!}\right) \\ &= \frac{2^{2m+3}(4m+1)!!\pi}{(2m+2)!} + \frac{2^{3m+3}m!(2m-1)!!(2m+1)!!\pi}{(2m+2)!(2m)!!}. \end{aligned}$$

ここで

$$2^m m! = (2m)(2m-2)\ldots 4\cdot 2 = (2m)!!$$

に注意すれば, 第 2 項は,

$$\frac{2^{3m+3}m!(2m-1)!!(2m+1)!!\pi}{(2m+2)!(2m)!!} = \frac{2^{2m+3}(2m-1)!!(2m+1)!!\pi}{(2m+2)!}$$

となる. よって,

$$I_{2m} = \frac{2^{2m+3}(4m+1)!!\pi}{(2m+2)!} + \frac{2^{2m+3}(2m-1)!!(2m+1)!!\pi}{(2m+2)!}$$
$$= \frac{2^{2m+3}\pi}{(2m+2)!}\{(4m+1)!! + (2m-1)!!(2m+1)!!\}$$

もとの n で表せば,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{2^{n+3}(2n+1)!!\pi}{(n+2)!} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{2^{n+3}\pi}{(n+2)!}\{(2n+1)!! + (n-1)!!(n+1)!!\} & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

n が奇数のときは,

$$I_n = \frac{2^{n+3}(2n+1)!!\pi}{(n+2)!} = \frac{2^{2n+4}(2n+1)!!\pi}{(n+2)(2n+2)!!} = \frac{2^{2n+4}\pi}{n+2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$$

としてもよい. 同様に, n が偶数なら,

$$I_n = \frac{2^{2n+4}\pi}{n+2}\left\{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} + \frac{(n-1)!!}{2^{n+1}n!!}\right\}.$$

(お侘び) 配布した問題では, $I_0 = \iint_D dxdy$ となっていたが, これは明らかに不自然. この解説では修正済みである. (ただし, 大勢に影響はない.)

関連問題

$$J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx, \qquad m, n \geq 0,$$

とおくとき, 次のことを示せ.

(1) $n \geq 1$ のとき, $J_{m,n} = \dfrac{2n-1}{2(m+n)} J_{m,n-1}$.

(2) $J_{m,n} = \dfrac{m!(2n-1)!!}{2^n(m+n)!} J_{m,0}$.

(3) $J_{m,0} = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \dfrac{\pi}{2}$.

5 平面の極座標を (r, θ) とするとき, $(-r, \theta)$ と $(r, \theta+\pi)$ は同じ点を表すものとする. $r = \sin n\theta$ で定義される曲線を考える.

(1) $n = 1$ のとき, この曲線を図示し, その曲線で囲まれた図形の面積を計算せよ.

(2) $n = 2$ のとき, この曲線を図示し, その曲線で囲まれた図形の面積を計算せよ.

(3) $n = 3$ のとき, この曲線を図示し, その曲線で囲まれた図形の面積を計算せよ.

– [**発展問題 (解答任意)**] 一般の n について同様の問題を考えよ.

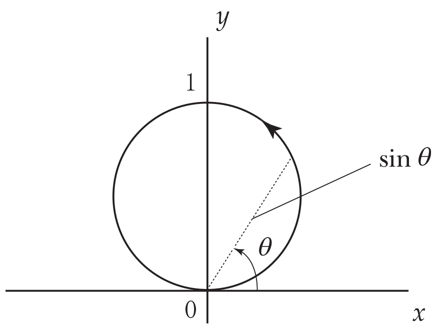
解説 (1) これは直交座標に直すと簡単になる.

$$x = r\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$y = r\sin\theta = \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

から

$$(2x)^2 + (1-2y)^2 = \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1.$$

これは, $(0, 1/2)$ を中心とする半径 $1/2$ の円であり, θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を変化するとき, この円周を 2 周する.



面積は,

$$S = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

であることは明らかであるが, 積分で計算しておこう. θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ でとると円周を 2 周することから, 求めるべき答の 2 倍が返ってきてしまうことに注意.

$$S = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} r\,dr = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $r = \sin 2\theta$ から $r = 0$ となるのは, $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ のときである. したがって, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ において曲線は原点から出発して第 1 象限内を通過して原点に戻ってくる.

$\pi/2 \le \theta \le \pi$ においては, 角度は第 2 象限を表すが, $r < 0$ となるので, 曲線は第 4 象限内を通過している. 以下同様に, この曲線は, $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ においては第 3 象限を, $3\pi/2 \le \theta \le 2\pi$ においては第 2 象限を通過する. 面積は,

$$S = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sin 2\theta} r dr = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{2}\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(3) (2) と同様にプロペラ形の曲線であるが, θ が $0 \le \theta \le \pi/3$ を動くとき, 原点から 1 周して元に戻る. さらに, $0 \le \theta \le 2\pi$ を変化するとき, 曲線を 2 周することになる. よって面積は,

$$S = 3\int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{\sin 3\theta} r dr = 3\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 3\theta}{2}\, d\theta = 3\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6\theta}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

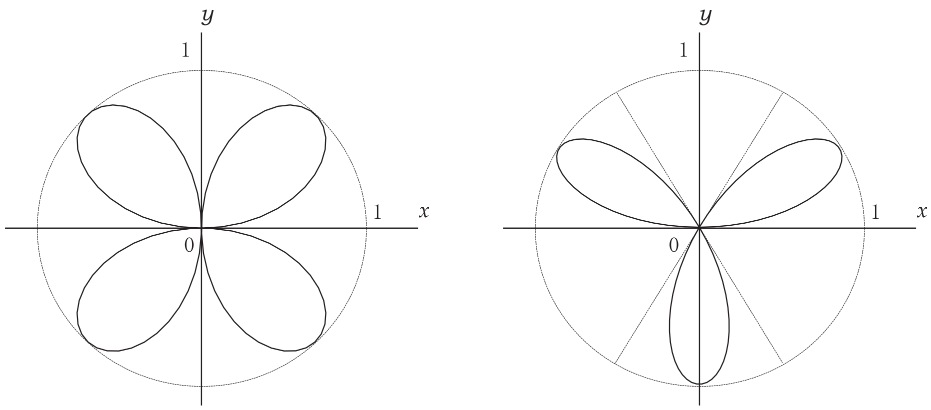


図 5.1: 左 : (2) の図. 右 : (3) の図

(4) n が偶数のときは, $2n$ 枚からなるプロペラ形である:

$$S = 2n\int_0^{\pi/n} d\theta \int_0^{\sin n\theta} r dr = 2n\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^2 n\theta}{2}\, d\theta = 2n\int_0^{\pi/n} \frac{1-\cos 2n\theta}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

n が奇数のときは, n 枚からなるプロペラ形であり, θ が $0 \le \theta \le 2\pi$ を変化するとき, 曲線を 2 周することになる. よって,

$$S = n\int_0^{\pi/n} d\theta \int_0^{\sin n\theta} r dr = n\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^2 n\theta}{2}\, d\theta = n\int_0^{\pi/n} \frac{1-\cos 2n\theta}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

6 平面の極座標を (r, θ) とする.

(1) 曲線 $r^2 = 2\cos 2\theta$ ($r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$) を図示し, その曲線で囲まれた図形の面積を計算せよ.

(2) 曲線 $r = 1 + \cos\theta$ ($0 \le \theta \le 2\pi$) を図示し, その曲線で囲まれた図形の面積を計算せよ.

(1) $r^2 \geq 0$ であるから, $\cos 2\theta \geq 0$ となる θ を考える. 明らかに,

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}, \qquad \frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$$

の範囲だけを考えることになり, その曲線は左図のようになる. 求める面積は, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ の範囲で定まる図形の面積の 4 倍である. よって,

$$S = 4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\theta}} r dr = 4\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 4\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2.$$

(2) これは簡単であろう.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r dr = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

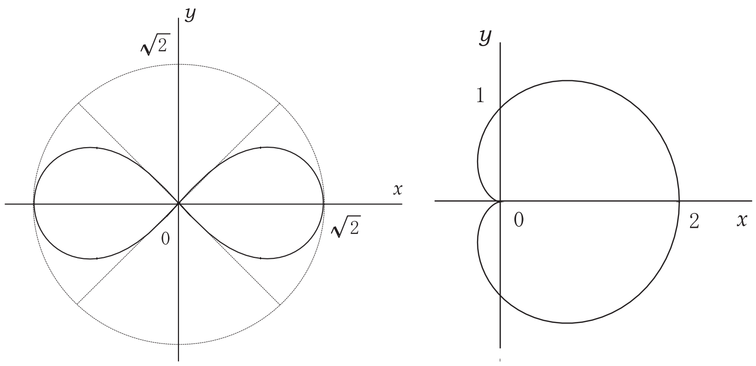


図 6.1: 左：(1) レムニスケート　右：(2) カージオイド

関連問題 $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ を定数とする. 関数 $f(\theta)$ が $\alpha \leq \theta \leq \beta$ において $f(\theta) \geq 0$ をみたすとき, 極座標による曲線 $r = f(\theta)$ と $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ の囲む図形の面積は

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

で与えられることを示せ. また, その図形的な意味を述べよ.

7 変数変換 $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y)$ が

$$x = \frac{v}{u}, \qquad y = uv \tag{7.1}$$

によって定義されている. 以下の問に答えよ.

(1) uv-平面における次の図形は xy-平面のどのような図形に写るか? 詳しく調べよ.

(a) 座標軸に平行な直線 (向きも考えよ)　　(b) 第 1〜第 4 象限

(c) 原点中心の円周 (向きも考えよ)

(2) $0 < a < b$, $c > 0$ を定数とする. 次の積分を変数変換 Φ を用いて計算せよ.

$$\iint_D e^{xy} dxdy, \qquad D = \left\{(x, y) \,;\, ax \leq y \leq bx,\ 0 \leq y \leq \frac{c}{x}\right\}.$$

(3) (2) の積分を直接 x, y による累次積分に変形せよ. 次に, (2) の結果と比較し, 得られる等式を考察せよ.

解説 (1) まず, 基本的な注意として, $u = 0$ (v 軸) は Φ の定義域に入らない. Φ の定義域は

$$\{(u, v) \,;\, u \neq 0\}$$

である.

(a) v 軸に平行な直線から考えよう. $u = c$ (定数 $\neq 0$) で与えられる. (7.1) で $u = c$ とおいて v を消去すると,

$$y = c^2 x. \tag{7.2}$$

ここで, 直線 $u = c$ が 直線 $y = cx^2$ に写ると早まってはいけない. 今示されたことは, 直線 $u = c$ 上の点が Φ で写されたとき方程式 (7.2) を満たす, ことである. よって, 直線 $u = c$ の像 (Φ によってできる図形) は直線 $y = cx^2$ の一般には「一部分」である. ところで, 直線 $y = c^2 x$ の傾きはつねに > 0 であることに注意しておき.

さて, 詳しく見てゆく. $u = c > 0$ のとき,

$$\lim_{v\to\infty} x = \lim_{v\to\infty} \frac{v}{c} = +\infty, \qquad \lim_{v\to-\infty} x = \lim_{v\to-\infty} \frac{v}{c} = -\infty, \tag{7.3}$$

したがって, 図の (1) を考えると, v が $-\infty$ から $+\infty$ に変化するにしたがって, 像の x 座標も $-\infty$ から $+\infty$ の範囲を動く. また, $u = c_1 > c > 0$ であれば, (2) のような位置関係になる.

次に, $u = c < 0$ のときであるが, (7.3) の極限は符号のつき方が逆になる. よって, 写された図形において矢印の向きが逆になる.

では, u 軸に平行な直線を考察しよう. 先に注意したように, v 軸は Φ の定義域に入っていないので, $v = c$ (定数) は $u > 0$ の部分と $u < 0$ の部分に分割して考えなければならない.

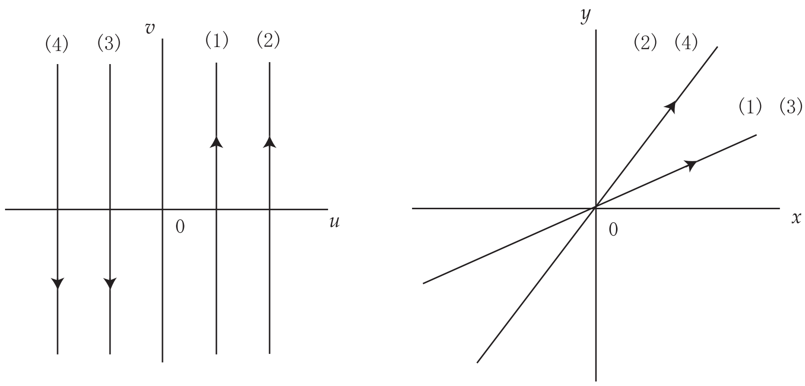


図 7.1: (a) v 軸に平行な直線

(7.1) で $v = c$ とおいて u を消去すると,

$$y = \frac{c^2}{x}. \tag{7.4}$$

前半と同様の考察によって向きを見出す.

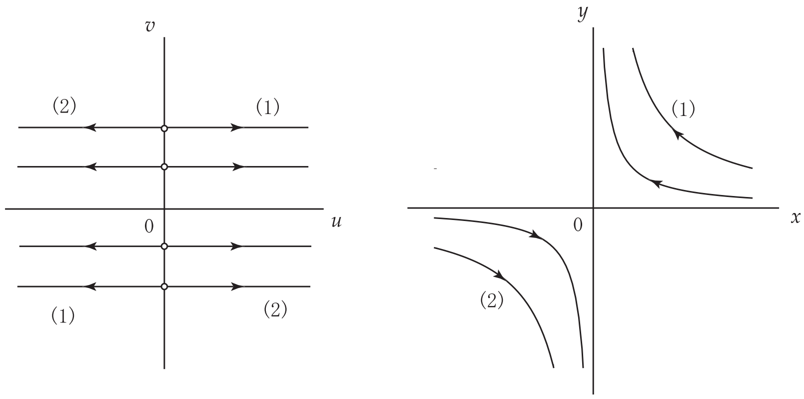


図 7.2: (a) u 軸に平行な直線

(b) すでに調べた u 軸に平行な直線の写り方からすぐわかる. $v = c$ (定数) の $u > 0$ の部分は, $c > 0$ を動かすことによって第一象限を埋め尽くす. そのとき, uv-平面のどこが埋め尽くされるかを考えよ.

(c) 原点中心の円は

$$u^2 + v^2 = r^2 \qquad (r > 0)$$

で与えられるが, これも $(0, \pm r)$ は除外しなければならない. (7.1) と連立して, u, v を消去すれば,

$$y = \frac{cx}{1 + x^2}. \tag{7.5}$$

先と同様に, このことの意味は円周 $u^2 + v^2 = r^2$ 上の点 (ただし, $(0, \pm r)$ は除外) が Φ によって写されると, (7.5) を満たす, ということである. 点が円周上を動くとき, (7.5) で表される

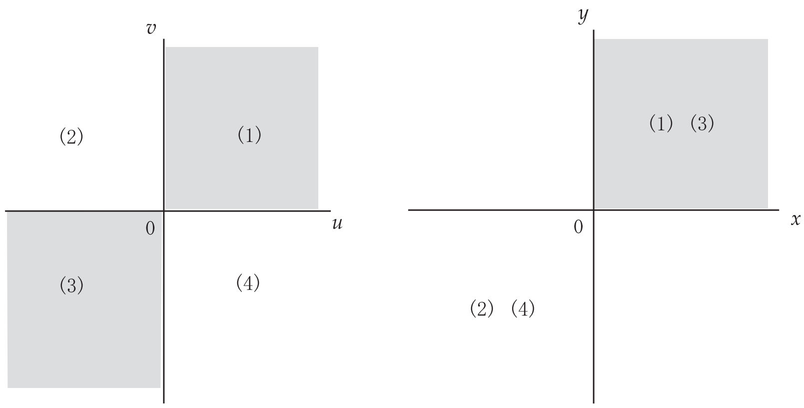


図 7.3: (b) 第 1〜第 4 象限

図形上をくまなく動くなどとは一言も言っていない. それを調べるためには, 円周上の点の動きを追跡する. (1) のように $(0,-r)$ から左回りに $(0,r)$ に至るとき, $u>0$ なので x は $-\infty$ から $+\infty$ に動く. よって, 像のほうは (1) のようになる. 引き続いて (2) のように $(0,r)$ から左回りに $(0,-r)$ に至るとき, $u<0$ なので, x は $-\infty$ から $+\infty$ に動く. よって, 像のほうは (1) と同じになる.

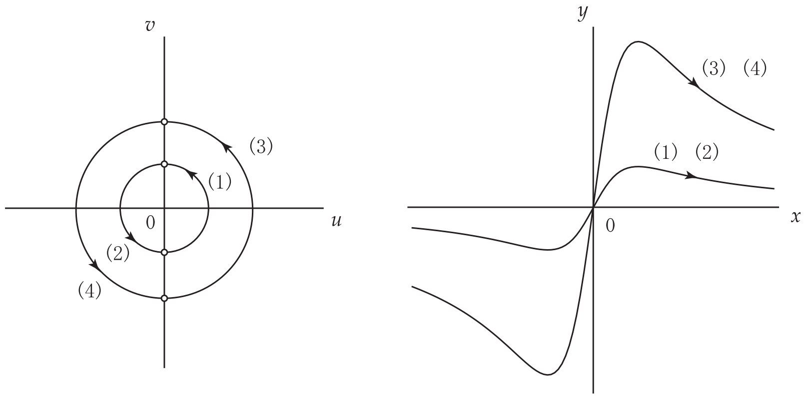


図 7.4: (c) 原点中心の円周

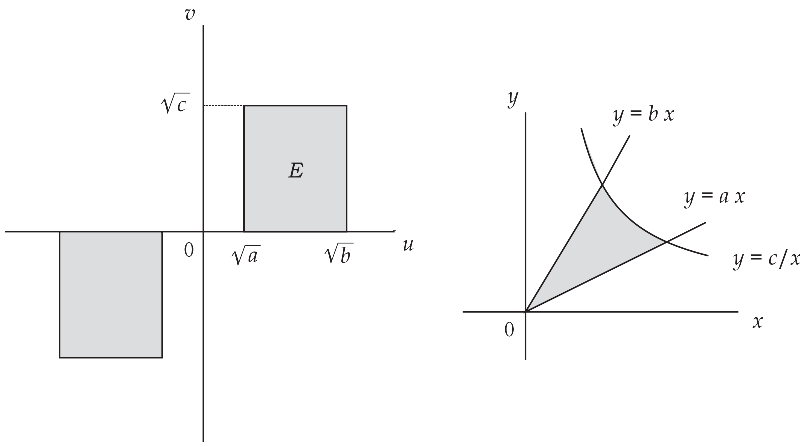
(2) (1) で調べたことを組み合わせれば, D を与える uv-平面の領域は

$$\begin{aligned}&\{(u,v)\,;\,a\le u^2\le b,\ 0\le v^2\le c,\ uv>0\}\\&=\{(u,v)\,;\,\sqrt{a}\le u\le\sqrt{b},\ 0\le v\le\sqrt{c}\}\cup\{(u,v)\,;\,-\sqrt{b}\le u\le-\sqrt{a},\ -\sqrt{c}\le v\le 0\}.\end{aligned}$$

この領域は Φ によって D に写されるが, 明らかに 2 対 1 写像になっている. したがって, Φ が 1 対 1 写像になるように制限する必要がある. ここでは,

$$E=\{(u,v)\,;\,\sqrt{a}\le u\le\sqrt{b},\ 0\le v\le\sqrt{c}\}$$

を考えよう.



また, 変換のヤコビアンは

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} -v/u^2 & 1/u \\ v & u \end{pmatrix} = -\frac{2v}{u}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_D e^{xy}dxdy &= \iint_E e^{v^2}|J(u,v)|\,dudv = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} du \int_0^{\sqrt{c}} e^{v^2}\,\frac{2v}{u}\,dv \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{du}{u} \int_0^{\sqrt{c}} e^{v^2} 2v\,dv = \left(\log\sqrt{b} - \log\sqrt{a}\right)(e^c - 1) \\ &= \frac{e^c-1}{2}(\log b - \log a).\end{aligned}$$

(3) $y = c/x$ と直線 $y = ax$ との交点の x 座標は $\sqrt{c/a}$ である. 同様に, $y = c/x$ と直線 $y = bx$ との交点の x 座標は $\sqrt{c/b}$ である. 直接 x, y に関する累次積分で表すために, 積分を 2 つに分ける必要がある.

$$I = \iint_D e^{xy}dxdy = \int_0^{\sqrt{c/b}} dx \int_{ax}^{bx} e^{xy}dy + \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} dx \int_{ax}^{c/x} e^{xy}dy.$$

それぞれの累次積分において y に関する積分を実行して,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2} - e^{ax^2}}{x}\,dx + \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^c - e^{ax^2}}{x}\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2} - e^{ax^2}}{x}\,dx - \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx + \frac{e^c}{2}(\log b - \log a). \qquad (7.6)\end{aligned}$$

(2) の結果から, これは

$$\frac{1}{2}(\log b - \log a)(e^c - 1)$$

に等しい. よって,

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx - \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx + \frac{e^c}{2}(\log b - \log a) = \frac{1}{2}(\log b - \log a)(e^c - 1).$$

整理して,

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx - \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\,(\log b - \log a). \tag{7.7}$$

という公式が得られた. なお, 左辺の積分は広義積分であり,

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx$$

で定義される. (7.7) の左辺をまとめなおして,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\{\int_\epsilon^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}}{x}\,dx - \int_\epsilon^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx\right\} = \frac{1}{2}\,(\log b - \log a) \tag{7.8}$$

としても良い.

(注意) 問題の趣旨は、「(7.6) を計算して (2) と同じ答えが得られることを確かめよ」ということではない. 計算することも可能である (以下の注意) が, (2) の答えと等置してある種の公式を導けばよい. なお, (7.8) の左辺には c が含まれているのに, 右辺には c が含まれていない. このことを利用して, いろいろな公式が得られる (試みよ).

(注意) では, (7.6) の積分

$$I = \int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx - \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx$$

を計算してみよう. まず, 積分

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx$$

は意味を持つが,

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}}{x}\,dx - \int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx$$

は意味を持たないことに注意. 実際,

$$\int_0^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx = +\infty$$

である (確かめよ). したがって,

$$I = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}-e^{ax^2}}{x}\,dx - \int_{\sqrt{c/b}}^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx$$

のように広義積分に書き直してから変形する.

$$I = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}}{x}\,dx - \int_\epsilon^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx \right\}$$

積分の第 1 項では $x \to x/\sqrt{b}$, 第 2 項では $x \to x/\sqrt{a}$ と変数変換して,

$$\int_\epsilon^{\sqrt{c/b}} \frac{e^{bx^2}}{x}\,dx - \int_\epsilon^{\sqrt{c/a}} \frac{e^{ax^2}}{x}\,dx = \int_{\epsilon\sqrt{b}}^{\sqrt{c}} \frac{e^{x^2}}{x}\,dx - \int_{\epsilon\sqrt{a}}^{\sqrt{c}} \frac{e^{x^2}}{x}\,dx = -\int_{\epsilon\sqrt{a}}^{\epsilon\sqrt{b}} \frac{e^{x^2}}{x}\,dx.$$

ここで, $x \to \epsilon x$ と変数変換して,

$$= -\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{e^{\epsilon^2 x^2}}{x}\,dx.$$

よって,

$$I = -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{e^{\epsilon^2 x^2}}{x}\,dx.$$

被積分関数は

$$\frac{e^{\epsilon^2 a}}{x} \le \frac{e^{\epsilon^2 x^2}}{x} \le \frac{e^{\epsilon^2 b}}{x}, \qquad \sqrt{a} \le x \le \sqrt{b},$$

を満たすから, 積分して,

$$e^{\epsilon^2 a}(\log\sqrt{b} - \log\sqrt{a}) \le \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{e^{\epsilon^2 x^2}}{x}\,dx \le e^{\epsilon^2 b}(\log\sqrt{b} - \log\sqrt{a}).$$

$\epsilon \downarrow 0$ として,

$$I = -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{a}} \frac{e^{\epsilon^2 x^2}}{x}\,dx = -(\log\sqrt{b} - \log\sqrt{a}) = -\frac{1}{2}(\log b - \log a).$$

こうして, (7.6) の積分が計算された.

(注意) (7.7) に現れる積分は, 変数変換によって, 不定積分

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

に帰着する. これは積分指数関数と呼ばれ (記号 $\mathrm{Ei}(x)$), 初等関数ではない!

関連問題 (7.8) の左辺は

$$-\int_{\sqrt{a}\,\epsilon}^{\sqrt{b}\,\epsilon} \frac{e^{x^2}}{x}\,dx$$

に等しいことを示し, 次の公式を導け:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{e^{\epsilon x^2}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,(\log b - \log a)$$

関連問題 変数変換 Φ を $\begin{cases} x = u + 2v \\ y = 2u - v \end{cases}$ で定義する. また, xy-平面内の領域 D を

$$D = \{(x, y)\,;\, |x + 2y| \leq 5,\ |2x - y| \leq 10\}$$

で定義する.

(1) D を図示せよ.

(2) 変数変換 Φ によって, uv-平面内のどのような領域 E が D に写されるか?

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$ を変数変換 Φ を用いて計算せよ.

[答] (1) 略. (2) $E = \{(u, v)\,;\, -1 \leq u \leq 1,\ -2 \leq v \leq 2\}$. (3) 0.

関連問題 変数変換 Φ を $\begin{cases} x = u + uv \\ y = u - uv \end{cases}$ で定義する.

(1) 変換 Φ は, uv-平面のどんな図形を xy-平面のどんな図形に写すか? いろいろな観点から考察せよ.

(2) 変換のヤコビアンについて $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -2u$ を示せ.

(3) $0 < a < b$ とする. 次の積分を計算せよ.

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy, \qquad D = \{(x, y)\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, a \leq x + y \leq b\}.$$

[答] $\dfrac{1}{4}(b^2 - a^2)(e - e^{-1})$

8 (1) 1 変数関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で C^1-級とする. (つまり, $f(x)$ が (a, b) 上で微分可能で $f'(x)$ が $[a, b]$ 上の連続関数に拡張される.) このとき,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)$$

が成り立つことをリーマン和を用いて証明せよ.
(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ が長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上で C^2-級とする. (つまり, $f(x, y)$ が $(a, b) \times (c, d)$ 上で x, y 変数に関して 2 回微分可能で, 2 回偏導関数が $[a, b] \times [c, d]$ 上の連続関数に拡張される.) このとき,

$$\iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\,dxdy$$

を $f(a, c)$ などの f の値を用いて表せ.
(3) (2) の結果を $f(x, y) = x^m y^n$ に対して検算せよ.

解説 (1) $[a,b]$ の分割を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とし, リーマン和

$$S(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \qquad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}],$$

を考える. 一方, 平均値の定理から,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(x_k + \theta_k(x_{k+1} - x_k))(x_{k+1} - x_k)$$

をみたす $0 < \theta_k < 1$ が取れる. リーマン和 $S(\Delta)$ は $\mathrm{mesh}(\Delta) \to 0$ の極限において

$$S(\Delta) \to \int_a^b f'(x)dx$$

に収束することはわかっているから, 代表点を特に $\xi_k = x_k + \theta_k(x_{k+1} - x_k)$ ととれば,

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k + \theta_k(x_{k+1} - x_k))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k)\} = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

これは Δ によらない定数である. よって,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{\mathrm{mesh}(\Delta)\to 0} S(\Delta) = f(b) - f(a).$$

(2) 累次積分を行うだけである.

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,dxdy &= \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,dy = \int_a^b dx \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]_{y=c}^{y=d} \\ &= \int_a^b dx \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\right\} = \Big[f(x,d) - f(x,c)\Big]_{x=a}^{x=b} \\ &= f(a,c) - f(b,c) + f(b,d) - f(a,d). \end{aligned}$$

(3) 略.

9 $K = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ とする. 次の積分を 2 通り以上の方法で計算し, 答えがあっていることを確認せよ.

$$I_n = \iiint_K x^n dxdydz, \qquad J_n = \iiint_K (x^2 + y^2) z^n dxdydz,$$

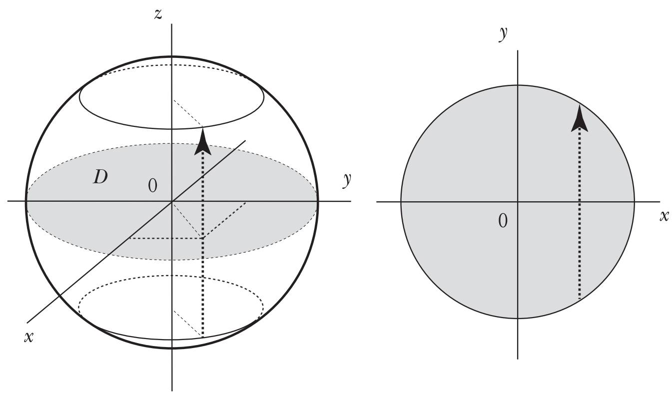
ただし, $n \ge 0$ は整数とする.

解説 (1) (a) 直交座標系による計算. $D=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\le 1\}$ とおくと,

$$K=\left\{(x,y,z)\,;\,-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ (x,y)\in D\right\}.$$

したがって,

$$I_n=\iiint_K x^n dxdydz=\iint_D dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^n dz.$$



この積分を内側から順に計算すればよい.

$$\begin{aligned}I_n&=\iint_D 2x^n\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\\&=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2x^n\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\\&=4\int_{-1}^{1}x^n dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\end{aligned}$$

ここで, 内側の積分は半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円の面積の 1/4 であるから,

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}(1-x^2).$$

よって,

$$I_n=\pi\int_{-1}^{1}x^n(1-x^2)dx.$$

n が奇数なら明らかに $I_n=0$. $n=2m$ が偶数なら,

$$\begin{aligned}I_{2m}&=2\pi\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)dx=2\pi\left[\frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\frac{x^{2m+3}}{2m+3}\right]_0^1\\&=2\pi\left(\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+3}\right)=\frac{4\pi}{(2m+1)(2m+3)}.\end{aligned}$$

こうして,

$$I_n = 0 \quad (n \text{ が奇数}), \qquad I_n = \frac{4\pi}{(n+1)(n+3)} \quad (n \text{ が偶数}).$$

(b) 極座標による計算.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

によって領域 K は

$$L = \{(r,\theta,\varphi)\,;\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

に写る. ヤコビアンは,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta.$$

したがって,

$$\begin{aligned} I_n &= \iiint_L (r\sin\theta\cos\varphi)^n r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 r^{n+2}dr \int_0^\pi \sin^{n+1}\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi. \end{aligned} \tag{9.1}$$

まず, n が奇数であれば,

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = 0$$

である. 実際, $\int_\pi^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi$ において変数変換 $\varphi = \pi + \psi$ を施すと,

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^\pi \cos^n(\pi+\psi)d\psi = \int_0^\pi (-1)^n \cos^n \psi d\psi = -\int_0^\pi \cos^n \psi d\psi. \tag{9.2}$$

よって,

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi + \left(-\int_0^\pi \cos^n \psi d\psi\right) = 0.$$

したがって, (9.1) は, n が奇数であれば $I_n = 0$.

n が偶数であれば, (9.2) と同様の考察によって,

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^\pi \cos^n \psi d\psi.$$

よって, (9.1) は,

$$I_n = \int_0^1 r^{n+2}dr \int_0^\pi \sin^{n+1}\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \frac{2}{n+3}\int_0^\pi \sin^{n+1}\theta d\theta \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi.$$

ところで, 1 変数の積分に関する次の公式は, 部分積分を繰り返して得られる:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & n \text{ が偶数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ が奇数}. \end{cases}$$

よって, n が偶数であることに注意して,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{8}{n+3}\int_0^{\pi/2}\sin^{n+1}\theta d\theta\int_0^{\pi/2}\cos^n\varphi d\varphi \\
&= \frac{8}{n+3}\,\frac{n!!}{(n+1)!!}\,\frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{4\pi}{(n+3)(n+1)}.
\end{aligned}$$

(c) 対称性の利用.

$$I_n = \iiint_K x^n dxdydz = \iiint_K y^n dxdydz = \iiint_K z^n dxdydz$$

である. 第 2 式は変わりはないが, 第 3 式は少し計算の要領が変わる (各自試みよ).

(2) (a) 直交座標による計算. (1) と同様である.

$$\begin{aligned}
J_n &= \iiint_K (x^2+y^2)z^n dxdydz \\
&= \iint_D dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)z^n dz \\
&= \iint_D (x^2+y^2)dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^n dz.
\end{aligned}$$

n が奇数なら明らかに,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^n dz = 0$$

となるから, $J_n = 0$. また, n が偶数なら,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^n = 2\left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{2}{n+1}\,(1-x^2-y^2)^{(n+1)/2}.$$

よって,

$$I_n = \frac{2}{n+1}\iint_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)^{(n+1)/2}dxdy.$$

これを平面極座標で計算しよう.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

とおいて,

$$I_n = \frac{2}{n+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(1-r^2)^{(n+1)/2} r dr d\theta = \frac{4\pi}{n+1}\int_0^1 r^3(1-r^2)^{(n+1)/2}dr.$$

ここで, $1-r^2=s$ とおく. $-2rdr=ds$ に注意して,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2\pi}{n+1}\int_0^1 (1-s)s^{(n+1)/2}ds = \frac{2\pi}{n+1}\left[\frac{s^{(n+3)/2}}{(n+3)/2}-\frac{s^{(n+5)/2}}{(n+5)/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{2}{n+3}-\frac{2}{n+5}\right) = \frac{8\pi}{(n+1)(n+3)(n+5)}. \end{aligned}$$

まとめると,

$$I_n = 0 \quad (n \text{ が奇数}), \qquad I_n = \frac{8\pi}{(n+1)(n+3)(n+5)} \quad (n \text{ が偶数}).$$

(注意) 上の計算は, 実質的には円柱座標を用いた計算である.

(b) 極座標による計算. (1) と同様に計算できる. まず,

$$J_n = \iiint_K (x^2+y^2)z^n dxdydz = \iiint_L r^2\sin^2\theta(r\cos\theta)^n r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi.$$

よって,

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 r^{n+4}dr \int_0^\pi \sin^3\theta\cos^n\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{n+5}\int_0^\pi \sin^3\theta\cos^n\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{n+5}\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^n\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

ここで $t=\cos\theta$ とおけば, $dt=-\sin\theta d\theta$ などから,

$$\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^n\theta\, d\theta = \int_{-1}^1 (1-t^2)t^n dt = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n+3}, & n \text{ が偶数} \\ 0, & n \text{ が奇数}. \end{cases}$$

こうして, n が奇数なら $J_n=0$. n が偶数なら,

$$J_n = \frac{2\pi}{n+5}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+3}\right) = \frac{8\pi}{(n+5)(n+3)(n+1)}.$$

関連問題 $K=\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0\}$ とおくとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iiint_K xyz\, dxdydz$$

[答] $\dfrac{1}{48}$

関連問題 $K=\left\{(x,y,z)\,;\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1,\ x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0\right\}$ とおくとき, 次の積分を計算せよ. ただし, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

$$\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz, \qquad \iiint_K \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz,$$

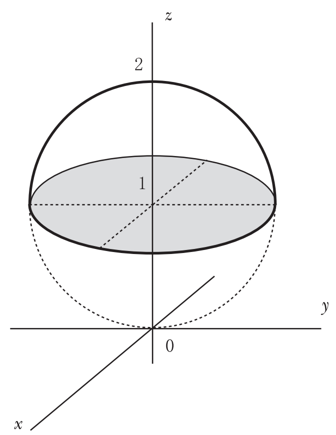
[答] $\dfrac{\pi}{30}(a^2+b^2+c^2)abc,\quad \dfrac{(abc)^2(bc+ca+ab)}{15(b+c)(c+a)(a+b)}$

10 $K = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ z \geq 1\}$ とする．空間極座標を用いて, 次の量を計算せよ．そのとき, (r,θ,φ) 空間のどのような領域で積分したかを図によって説明せよ．

$$V(K) = \iiint_K dxdydz, \qquad x_0 = \frac{1}{V(K)}\iiint_K x\,dxdydz,$$

$$y_0 = \frac{1}{V(K)}\iiint_K y\,dxdydz, \qquad z_0 = \frac{1}{V(K)}\iiint_K z\,dxdydz$$

解説 空間極座標は



$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

によって定められる．また, 変数の変域は

$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

さて, $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$, $z \geq 1$ に代入すると,

$$r^2\sin^2\theta + (r\cos\theta - 1)^2 \leq 1, \qquad r\cos\theta \geq 1.$$

少し整理して,

$$r^2 - 2r\cos\theta \leq 0, \qquad r\cos\theta \geq 1.$$

$r \geq 0$, $\cos\theta \geq 0$ に注意すれば,

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2\cos\theta$$

のようにまとめられる．したがって, θ は

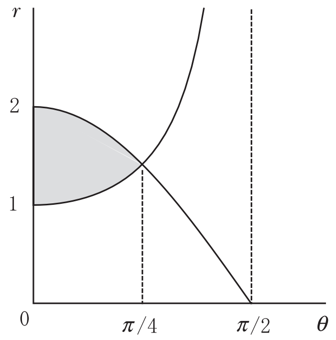
$$\frac{1}{\cos\theta} \leq 2\cos\theta$$

を満たさねばならないから, 本来の $0 \le \theta \le \pi$ とあわせて

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

を得る. こうして, 領域 K を極座標で表すとき (r, θ, φ) の動く領域は

$$L = \left\{ (r, \theta, \varphi)\,;\ \frac{1}{\cos\theta} \le r \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}.$$



以上の準備の下で積分を計算しよう. まず,

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iiint_L r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=1/\cos\theta}^{r=2\cos\theta} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \left(8\cos^3\theta - \frac{1}{\cos^3\theta} \right) d\theta.
\end{aligned}$$

$t = \cos\theta$ と変数変換して,

$$\begin{aligned}
V(K) &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(8t^3 - \frac{1}{t^3} \right) dt \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[2t^4 + \frac{1}{2t^2} \right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{2\pi}{3} \left\{ \left(2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right\} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
x_0 V(K) &= \iiint_K x\, dx dy dz \\
&= \iiint_L r \sin\theta \cos\varphi \times r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3 \sin^2\theta \cos\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta\, d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3\, dr.
\end{aligned}$$

ここで内側の 2 つの積分を実行すると定数になり, その定数に積分

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi$$

を乗ずることになる. しかし, この積分は $\cos\theta$ の周期性によって明らかに 0 である. よって, $x_0 V(K) = 0$. 同様の理由によって, $y_0 V(K) = 0$ もわかる. こうして,

$$x_0 = y_0 = 0.$$

最後に, $z_0 V(K)$ を計算しよう.

$$\begin{aligned} z_0 V(K) &= \iiint_K z \, dxdydz \\ &= \iiint_L r\cos\theta \times r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3 \sin\theta\cos\theta \, dr. \end{aligned}$$

$V(K)$ の計算と同じ変換を用いて計算する.

$$\begin{aligned} z_0 V(K) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta \left(16\cos^4\theta - \frac{1}{\cos^4\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{1/\sqrt{2}}^1 t \left(16t^4 - \frac{1}{t^4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{12}\pi. \end{aligned}$$

よって,

$$z_0 = \frac{11}{8}.$$

注意 積分の計算にあたっては, $(0,0,1)$ を中心とする極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta + 1$$

の方が便利である. そうすれば, K を表す (r,θ,φ) の範囲は,

$$\left\{(r,\theta,\varphi)\,;\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$$

となるからである. 上の問題では, 極座標の計算練習を兼ねているので, あえて原点中心の極座標で出題した.

11 空間内の一般の領域 K に対しても, 問題 10 のようにして (x_0, y_0, z_0) を定義する. この点は K の重心と呼ばれるが, その理由を例などを用いて説明せよ. また, 自分の好きな K に対して重心を計算せよ.

解説 領域 K が一様な密度 $\rho > 0$ をもつとする. このとき, 領域内の (x, y, z) における微小立方体の質量は $\rho dxdydz$ である. (x_0, y_0, z_0) を中心とする各軸方向のモーメントは,

$$x\text{-軸: } (x - x_0)\rho dxdydz, \quad y\text{-軸: } (y - y_0)\rho dxdydz, \quad z\text{-軸: } (z - z_0)\rho dxdydz.$$

領域全体のモーメントは, これを K 上で総和すればよいので, たとえば x-軸方向では,

$$M_x = \iiint_K (x - x_0)\rho dxdydz = \rho \iiint_K xdxdydz - \rho x_0 V(K).$$

x_0 の定義から,

$$M_x = 0$$

となる. 同様に,

$$M_y = M_z = 0.$$

このことから $(x_0, y_0.z_0)$ は領域 K のつりあいの位置を表すものと考えられる. それが重心と呼ばれる所以である.

関連問題 円錐の重心を求めよ.

12 次の命題は正しいか? 正しければ証明, 誤りならば反例によって説明せよ.

(1) 開区間 $(0, 1)$ で定義された 1 変数関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で微分可能ならば, その点で連続である.

(2) 開集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で偏微分可能ならば, その点で連続である.

(3) $f(x, y)$ を $D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$ で定義された C^1-級関数とするとき, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ がすべての $(x, y) \in D$ で成り立てば, $f(x, y)$ は定数である.

(4) $F_n \subset \mathbf{R}^2$ を閉集合の列とすれば, それらの和集合 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ も閉集合である.

解説 (1) 正.

$$\lim_{h\to 0} |f(a + h) - f(a)| = \lim_{h\to 0} |h| \left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} |h||f'(a)| = 0$$

から, $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

ϵ-δ 論法も使える. 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して,

$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon, \qquad |h| < \delta,$$

が成り立つ. 同じことであるが,

$$|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|<\epsilon|h|.$$

三角不等式によって

$$\begin{aligned}|f(a+h)-f(a)| &= |\{f(a+h)-f(a)-f'(a)h\}+f'(a)h| \\ &\le |f(a+h)-f(a)-f'(a)h|+|f'(a)h| \\ &< (\epsilon+|f'(a)|)|h|, \qquad |h|<\delta.\end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{h\to 0}|f(a+h)-f(a)|=0.$$

これは $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを示している.

(2) 誤. 反例としては,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

などがある [教科書参照]. まず, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続でない. 点 (x,y) を直線 $y=ax$ に沿って $(0,0)$ に近づけてみる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(ax)}{x^2+(ax)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+a^2}.$$

よって, $(0,0)$ への近づき方によって極限値が異なる. つまり, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではありえない. 次に, $(0,0)$ における偏微分を計算してみよう.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

同様に,

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で偏微分可能.

(3) 正. 平均値の定理を利用しよう. $(a,b),(a+h,b+k)\in D$ とするとき,

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

をみたす $0<\theta<1$ がとれる. $(a+\theta h,b+\theta k)\in D$ であるから, 仮定によって,

$$f_x(a+\theta h,b+\theta k)=f_y(a+\theta h,b+\theta k)=0.$$

よって,

$$f(a+h,b+k)=f(a,b).$$

したがって, D 内の任意の 2 点において $f(x,y)$ の値が等しい. つまり, $f(x,y)$ は定数である.

(4) 誤. 正方形の増大列

$$F_n = \left\{(x,y)\,;\, \frac{1}{n} \le x \le 1-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n} \le y \le 1-\frac{1}{n}\right\}.$$

を考えよう. 境界が含まれることから F_n は閉集合である. しかし,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{(x,y)\,;\, 0<x<1,\ 0<y<1\}$$

は境界を含まないので閉集合ではない.

関連問題 上の等式 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{(x,y)\,;\, 0<x<1,\ 0<y<1\}$ を証明せよ.

関連問題 D が穴の開いた領域であるとする. たとえば, $D=\{(x,y)\,;\, 1<x^2+y^2<2\}$ を考えよう. $f(x,y)$ が D 上の偏微分可能な関数であって,

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0, \qquad (x,y)\in D,$$

を満たすものとする. このとき, $f(x,y)$ は定数であることを証明せよ. (注意) 上の (3) の証明は, この D に対しては不完全である. よく考えて完全な証明を与えよ.

関連問題 平面における開正方形 $R=\{(x,y)\,;\, 0<x<1,\ 0<y<1\}$ において, 開円板 $U_n \subset R$ をとって,

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

のように, R を埋め尽くすことができる. そのような開円板の列を具体的に示せ. (U_n は互いに重なり合ってもよい.)

関連問題 平面における閉正方形 $\overline{R}=\{(x,y)\,;\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ において, 開円板 $U_n \subset R$ をとって,

$$\overline{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

のように, R を埋め尽くすことができるか?

13 次の関数の $(0,0)$ における連続性・偏微分可能性・全微分可能性・偏導関数の連続性などを自由に考察せよ.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

解説 (1) 不連続. $y = mx^2$ に沿って原点に近づく様子を調べよう.

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

したがって, これは一般には $f(0,0) = 0$ に一致しない. (さらに言えば, m のとり方によって, 上の極限値が異なる.)

(2) 偏微分可能. 定義に従って計算する.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

これらの極限値が存在することから偏微分可能である.

(3) 全微分不可能. 一般論で, 全微分可能なら連続である. しかし, (1) で見たように不連続であるから全微分不可能. 直接言っても良い. 全微分可能だったとして,

$$f(x,y) - f(0,0) = Ax + By + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

を満たす A, B が存在する. $y = 0$ として $x \to 0$, または, $x = 0$ として $y \to 0$ を考えると,

$$A = f_x(0,0) = 0, \qquad B = f_y(0,0) = 0$$

がわかる. よって,

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = o(\sqrt{x^2+y^2})$$

が導かれる. この意味は,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

である. これは成り立たない. たとえば, $y = mx$ に沿って考えると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{mx}{x^2+m^2} \frac{1}{|x|\sqrt{1+m^2}} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{m}{x^2+m^2} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{m\sqrt{1+m^2}} \neq 0.\end{aligned}$$

(4) 偏導関数は不連続. 計算によって, $(x,y) \neq (0,0)$ なら

$$f_x(x,y) = -\frac{2xy(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$

$(x,y) = (0,0)$ なら (2) で求めたように,

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

$y = mx$ に沿って $(x, y) \to (0, 0)$ としてみよう.

$$\lim_{x\to 0} f_x(x, mx) = -\lim_{x\to 0} \frac{2mx^2(x^4 - m^2x^2)}{(x^4 + m^2x^2)^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{2m(x^2 - m^2)}{(x^2 + m^2)^2} = \frac{2}{m}.$$

これは, $f_x(0, 0) = 0$ に一致しない. 同様に,

$$\lim_{x\to 0} f_y(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^4 - m^2x^2)}{(x^4 + m^2x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - m^2)}{(x^2 + m^2)^2} = -\frac{1}{m^2}.$$

これは, $f_y(0, 0) = 0$ に一致しない.

14 下の数学用語から思いつく数学の事柄を題目とし, あげてある数学用語をすべて用いて, その事柄を説明せよ. (注意) 下の用語を題目にするのではないし, またそれらの説明を求めているのではない. 柔軟な発想を期待する.

グラフ, 極座標, 行列, 偏微分

解説 題目を例示すれば

平面図形の面積, 空間図形の体積, 接平面, 重積分の変数変換, ヤコビアン,...

題目を説明するために, 問題の 4 つの言葉を用いる. 問題にあげた 4 つの言葉を順に説明するような解答は 0 点.

15 $c > 0$ を定数, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を C^2-級の 1 変数関数であるとし,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy\right\}$$

とおく.

(1) $u(x, t)$ は次の条件 (初期条件という) を満たすことを証明せよ.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

(2) $u(x, t)$ は次の方程式 ((1 次元) 波動方程式という) を満たすことを証明せよ.

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

解説 計算するだけである. 勘違いを避けるために, 不慣れなうちは,

$$\int \psi(y)dy = \Psi(y) \iff \Psi'(y) = \psi(y)$$

とおいて,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct) + \frac{1}{c}(\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct))\right\}$$

として計算するのがよいだろう.

(1) まず,

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x) + \varphi(x) + \frac{1}{c}(\Psi(x) - \Psi(x))\right\} = \varphi(x)$$

は明らか.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left\{(-c)\varphi'(x-ct) + c\varphi'(x+ct) + \frac{1}{c}(c\Psi'(x+ct) - (-c)\Psi'(x-ct))\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-c\varphi'(x-ct) + c\varphi'(x+ct) + (\Psi'(x+ct) + \Psi'(x-ct))\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-c\varphi'(x-ct) + c\varphi'(x+ct) + \psi(x+ct) + \psi(x-ct)\right\}. \end{aligned} \tag{15.1}$$

したがって,

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}\left\{-c\varphi'(x) + c\varphi'(x) + \psi(x) + \psi(x)\right\} = \psi(x).$$

(2) (15.1) をもう 1 度 t で偏微分して,

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left\{c^2\varphi''(x-ct) + c^2\varphi''(x+ct) + c\psi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)\right\}. \tag{15.2}$$

一方,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}\left\{\varphi'(x-ct) + \varphi'(x+ct) + \frac{1}{c}(\psi(x+ct) - \psi(x-ct))\right\}, \\ u_{xx} &= \frac{1}{2}\left\{\varphi''(x-ct) + \varphi''(x+ct) + \frac{1}{c}(\psi'(x+ct) - \psi'(x-ct))\right\}. \end{aligned} \tag{15.3}$$

(15.2) と (15.3) を見比べて,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

を得る.

16 問題 15 の逆を示そう. $f(x,t)$ を C^2-級関数とし, 波動方程式

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

を満たすものとする.

(1) $y=x-ct$, $z=x+ct$ として, $v(y,z)=f(x,t)$ とおくとき, $v_{yz}=0$ を示せ.

(2) (1) のとき, $v(y,z)=g(y)+h(z)$ という形になることを示せ.

(3) さらに, $f(x,t)$ が初期条件 $f(x,0)=\varphi(x)$, $f_t(x,0)=\psi(x)$ を満たすとき,

$$f(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy\right\}$$

の形であることを示せ.

解説 (1) $y=x-ct$, $z=x+ct$ を x,t について解けば,

$$x=\frac{y+z}{2},\qquad t=\frac{z-y}{2c}.$$

よって,

$$v(y,z)=f\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right).$$

微分を計算して,

$$\begin{aligned}
v_y&=\frac{1}{2}f_x\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)-\frac{1}{2c}f_t\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right),\\
v_{yz}&=\frac{1}{4}f_{xx}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)+\frac{1}{4c}f_{xt}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)\\
&\qquad-\frac{1}{4c}f_{xt}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)-\frac{1}{4c^2}f_{tt}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)\\
&=\frac{1}{4}f_{xx}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right)-\frac{1}{4c^2}f_{tt}\left(\frac{y+z}{2},\frac{z-y}{2c}\right).
\end{aligned}$$

ここで $c^2f_{xx}=f_{tt}$ を用いれば, 最後の式は 0. よって, $v_{yz}=0$.

(2) $v_y(y,z)$ を y を定数, z の関数とみなそう. z で微分した結果が恒等的に 0 であるから z に関して定数である. つまり, $v_y(y,z)=G(y)$. z を固定して, y で積分すれば,

$$v(y,z)=\int G(y)dy=g(y)+C$$

となるが, C は z を固定するごとに定まる定数であるから, z の関数である. これを $h(z)$ とおいたものが, $v(y,z)=g(y)+h(z)$ である.

(3) (1), (2) より,

$$f(x,t) = v(x-ct, x+ct) = g(x-ct) + h(x+ct). \tag{16.1}$$

ここで,

$$\varphi(x) = f(x,0) = g(x) + h(x). \tag{16.2}$$

また,

$$f_t(x,t) = -cg'(x-ct) + ch'(x+ct)$$

であるから,

$$\psi(x) = f_t(x,0) = -cg'(x) + ch'(x). \tag{16.3}$$

(16.2) から

$$\varphi'(x) = g'(x) + h'(x).$$

これと (16.3) から,

$$g' = \frac{1}{2c}(c\varphi' - \psi), \qquad h' = \frac{1}{2c}(c\varphi' + \psi).$$

これを積分して $g(x)$ と $h(x)$ を得るが, $g(x) + h(x) = \varphi(x)$ を満たすように積分定数を選ぶ. よって,

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)dy, \qquad h(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)dy,$$

とすればよい. こうして, (16.1) は,

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= g(x-ct) + h(x+ct) \\
&= \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(y)dy \\
&= \frac{1}{2}(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy
\end{aligned}$$

となり証明を終える.

17 $f(x,y) = 7x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2$ とする.

(1) すべての x, y に対して $f(x,y) \geq 0$ を示せ.

(2) (x,y)-平面における曲線

$$f(x,y) = 1, \quad f(x,y) = 2, \quad f(x,y) = 3, \quad f(x,y) = 4$$

を図示せよ.

(3) 空間において曲面 $z = f(x,y)$ の概形を示せ.

(4) $g(x,y) = 7x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2$ とする. $z = f(x,y)$ と $z = g(x,y)$ の関係を調べよ.

解説 (1) たとえば x について平方完成すれば,

$$f(x,y) = 7\left(x - \frac{\sqrt{3}}{7}\,y\right)^2 + \frac{32}{7}\,y^2$$

となるから, $f(x,y) \geq 0$ は明らか.

[注意] 微分法で $(x,y) = (0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をもつことが示される (標準的な議論). しかし, このことだけから $f(x,y) \geq 0$ は結論できない. 重大な誤りとなる! 極小値の意味をよく復習せよ. 極小値とは, その点の近傍における値だけと比較すれば「最小」である (数学用語としては不適切) というにすぎない.

(2) [行列を用いる解法. ややくどいくらいに説明しておく.] 行列と内積によって表せば,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{17.1}$$

そこで,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

を対角化することを考える. 固有値は,

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$

を解いて, $\lambda = 4, 8$. 対応する固有ベクトルは, それぞれ

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

を解いて求められる. 定数倍の任意性があるので長さが 1 のものを定めると,

$$\text{固有値 } 4 \text{ の固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{固有値 } 8 \text{ の固有ベクトル} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

(これらの (-1) 倍でもよい.) よって,

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

まとめて書けば,

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \tag{17.2}$$

そこで,

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

とおくと, (17.2) より,

$$T^t A T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \iff A = T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} T^t.$$

が得られる.

次に, (17.1) で定められる $f(x, y)$ を T を用いて表すと,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

そこで,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

とおくと,

$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 4x'^2 + 8y'^2 \tag{17.4}$$

となる.

では, 座標変換 (17.3) を考察しよう. まず, T は直交行列であることが確かめられる. 直交行列とは,

$$TT^t = T^t T = I$$

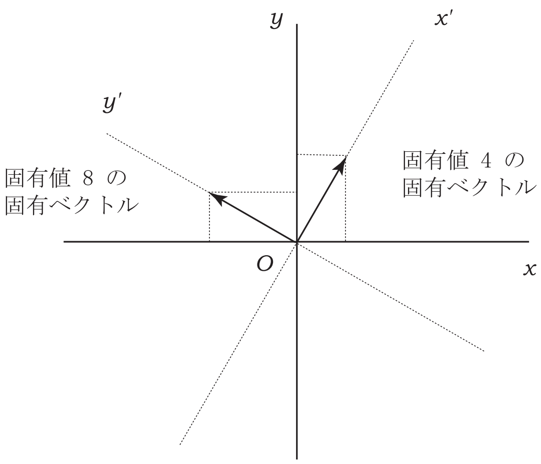
を満たす行列 (言い換えれば, $T^t = T^{-1}$ を満たす行列) のことである. したがって, (17.3) は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と同じことになる. この式を用いて, 新しい座標系 (x', y') における基本ベクトルは, 旧座標系ではどうなるかを計算してみよう.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \text{固有値 } 4 \text{ の固有ベクトル}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \text{固有値 } 8 \text{ の固有ベクトル} \end{aligned}$$

つまり, 新座標系は行列 A の固有ベクトルに沿って設定したものである. 上の 2 つの固有ベクトルは, 互いに直交するから, 新座標系も直交座標である.



図からわかるように, 新しい座標系 (x', y') は旧座標系を正の方向へ (反時計回りに) $\pi/3$ だけ回転したものである. ここで,

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix}$$

に注意しよう. このような行列による変換は座標軸の回転を与えるのである. しばしば, T は回転の行列と呼ばれる.

[注意] 2 つの固有値 $4, 8$ をこの順序に並べる必然性はない. (17.2) を

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

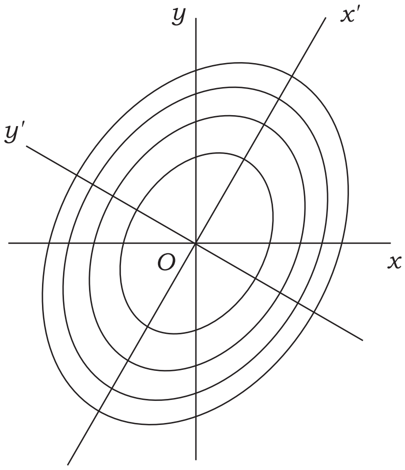
として T を定義しても同様である. そうすると, 図において x' と y' が入れ替わる. この場合は, T は回転ではなく, 回転と反転 (裏返し) の組合せになることに注意しよう. 同じ状況は, 固有ベクトルを選ぶときに向きを逆にしたものを選ぶと起こる. たとえば, 固有値 4 に対応する固有ベクトルを逆向きにとれば, x' 軸の向きが逆になる.

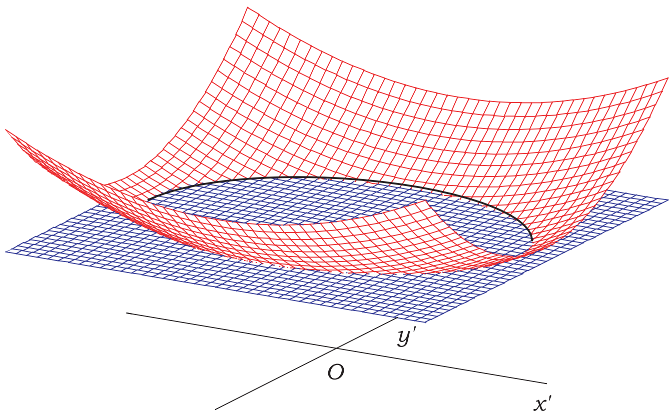
(17.4) に戻ろう. $f(x, y) = c$ は新座標系では,

$$4x'^2 + 8y'^2 = c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\dfrac{\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

これは, x' 方向に長径 $\dfrac{\sqrt{c}}{2}$, y' 方向に短径 $\dfrac{\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}$ をもつ楕円である. $c = 1, 2, 3, 4$ に対して図示したものが下図である (楕円は等間隔で並んでいない).

(3) 曲面 $z = f(x, y)$ を $z = 1, 2, 3, 4$ で切った切り口が (2) によって示されている. 一般に, $z = c$ で切れば, 楕円になる. また, $x = c$ で切れば, $z = f(c, y)$ は y の 2 次関数であるから放物線である. $y = c$ でも同様である.





(4) 明らかに

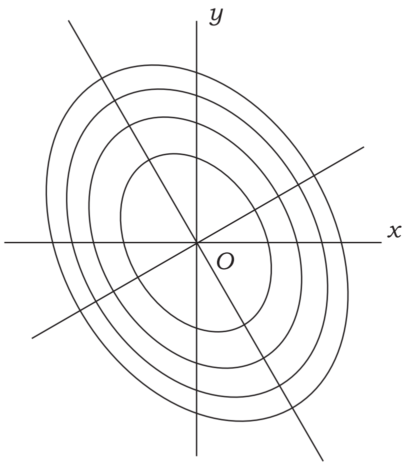
$$g(x,y) = 7x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2 = f(-x,y).$$

よって, $z = g(x,y)$ の $z = c$ による切り口の方程式は,

$$f(-x,y) = c$$

である. これは, $f(x,y) = c$ を y 軸で折り返したものである. したがって, 曲面 $z = g(x,y)$ と曲面 $z = f(x,y)$ は yz 平面に関して対称の位置にある.

なお, $g(x,y) = f(x,-y)$ から考察すれば, 曲面 $z = g(x,y)$ と曲面 $z = f(x,y)$ は xz 平面に関して対称の位置にあるともいえる.



18 $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ とする．

(1) (x,y)-平面における曲線

$$f(x,y) = -2, \quad f(x,y) = -1, \quad f(x,y) = 0, \quad f(x,y) = 1, \quad f(x,y) = 2$$

を図示せよ．

(2) 空間において曲面 $z = f(x,y)$ の概形を示せ．

(3) $g(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ とする．$z = f(x,y)$ と $z = g(x,y)$ の関係を調べよ．

解説 (1) 前問と同様の考察を行う．行列の 2 次形式で表せば，

$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle .$$

そこで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考察する．固有値と固有ベクト (長さ 1 に正規化されたもの) は，

$$\text{固有値 } -1 \text{ の固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{固有値 } 3 \text{ の固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

よって，

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}$$

とおいて, 座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

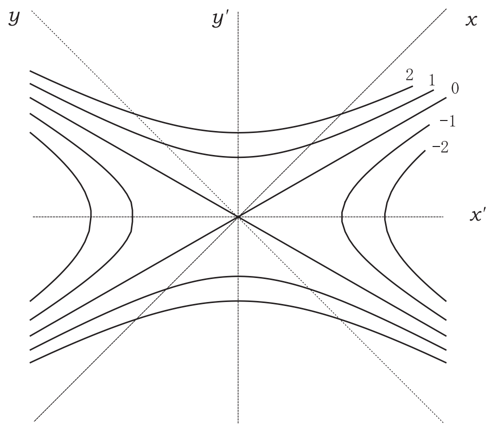
を考える．前問で述べたように, T は $-\pi/4$ の回転を表す行列である．つまり, 新座標系 (x', y') は旧座標系を $-\pi/4$ の回転させたものである. さて,

$$AT = T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \iff A = T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} T^t$$

から, $f(x, y)$ を (x', y') で表すと,

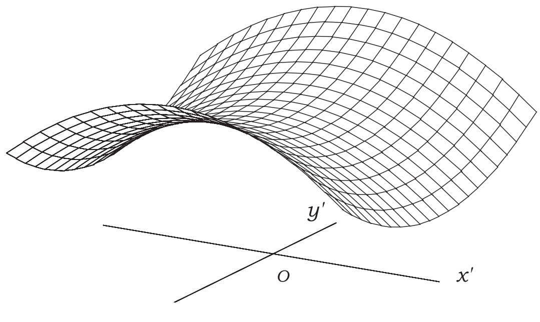
$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = -x'^2 + 3y'^2.$$

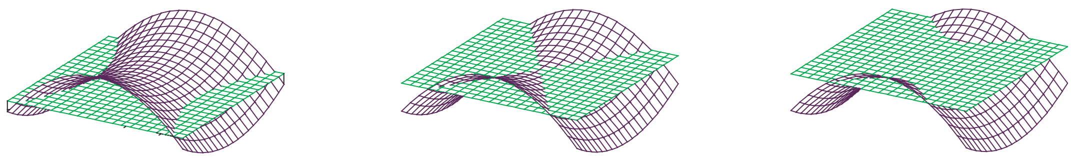
曲線 $f(x, y) = c$ は新座標系では $-x'^2 + 3y'^2 = c$ となり, 双曲線であることがわかる.



(2) 上図のようである. ついでに, $z = -2, 0, 1$ の切り口を示しておく.

(3) $g(x, y) = f(-x, y)$ から, 曲面 $z = g(x, y)$ と曲面 $z = f(x, y)$ は yz 平面に関して対称の位置にある．また, $g(x, y) = f(x, -y)$ から考察すれば, それらは xz 平面に関して対称の位置にあるともいえる.





19 関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ と正則行列 T (つまり, T^{-1} の存在する行列) による変数変換 (座標変換)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $ac - b^2 \neq 0$ のときは, $f(x,y) = \pm x'^2 \pm y'^2$ の形 (複号任意) にできることを示せ.

(2) $ac - b^2 = 0$ の場合について考察せよ.

解説 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値を α, β とする. それらは実数であることがわかる. 適当な直交行列 T によって A は対角化され,

$$A = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} T^t$$

となる. 新しい座標を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すれば, $f(x,y) = \alpha x'^2 + \beta y'^2$ となる. また,

$$ac - b^2 = \det A = \alpha\beta$$

であるから, (1) の条件は $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ を意味し, (2) の条件は $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ を意味する.

(1) 次の 4 つの場合がある.

(i) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (ii) $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (iii) $\alpha < 0$, $\beta > 0$ (iv) $\alpha < 0$, $\beta < 0$

まず, (i) の場合.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

によって, 新しい座標系 (x'', y'') を定めれば,

$$f(x, y) = x''^2 + y''^2$$

となる. 座標系 (x'', y'') と (x, y) の関係は,

$$T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって考えるべき正則行列は

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} T^t$$

である.

(ii) $\beta < 0$ に注意して,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

によって, 新しい座標系 (x'', y'') を定めれば,

$$f(x, y) = x''^2 - y''^2$$

となる. 座標系 (x'', y'') と (x, y) の関係は,

$$T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\beta} \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって考えるべき正則行列は

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-\beta} \end{pmatrix} T^t$$

である.

(iii) は (ii) と同様, (iv) は (i) で α, β をそれぞれ $-\alpha$, $-\beta$ に置き換えればよい.

[お詫び] 問題にミスプリントがありました. (1) で, 「$f(x, y) = x'^2 \pm y'^2$ の形にできることを示せ」は「$f(x, y) = \pm x'^2 \pm y'^2$ の形 (複号任意) にできることを示せ」に訂正します.

(2) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ であれば, $f(x, y) = \beta y'^2$ である.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\beta|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

によって, 新しい座標系 (x'', y'') を定めれば,

$$f(x, y) = \begin{cases} y''^2 & \beta > 0 \text{ のとき}, \\ -y''^2 & \beta < 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

となる. 座標系 (x'', y'') と (x, y) の関係は,

$$T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\beta|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\beta|} \end{pmatrix} T^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって, 正則行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\beta|} \end{pmatrix} T^t$$

によって, $f(x, y) = \pm y''^2$ の形に変形できる.

同様に, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ であれば, 正則行列による変換によって $f(x, y) = \pm x'^2$ の形に変形できる.

最後に, $\alpha = \beta = 0$ であれば, やはり正則行列による変換によって $f(x, y) = 0$ に変換できる.

関連問題 次の方程式で表される曲線の概形を描け. また, 左辺の式を $f(x, y)$ とおくとき, 曲面 $z = f(x, y)$ の概形を示せ.

(1) $-7x^2 - 48xy + 7y^2 = 50$

(2) $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 4$

(3) $4x^2 - 4xy + y^2 = 4$

20

(1) $x^3 + y^3 - xy$ の極値を求めよ.

(2) $x^4 - y^2$ の極値はヘッシアンを調べるだけではわからない. さらなる工夫によって, 極値を求めよ.

(3) 同様に $(y - x^2)(y - 2x^2)$ の極値を求めよ.

解説 (1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ とおく. 簡単な計算によって,

$$f_x = 3x^2 - y, \qquad f_y = 3y^2 - x.$$

極値を求めるために, まず, $f_x = f_y = 0$ となる点を求める.

$$3x^2 - y = 3y^2 - x = 0$$

を解いて,

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

次に, 2 階導関数

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -1, \qquad f_{yy} = 6y.$$

からヘッシアンは,

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}.$$

さて,

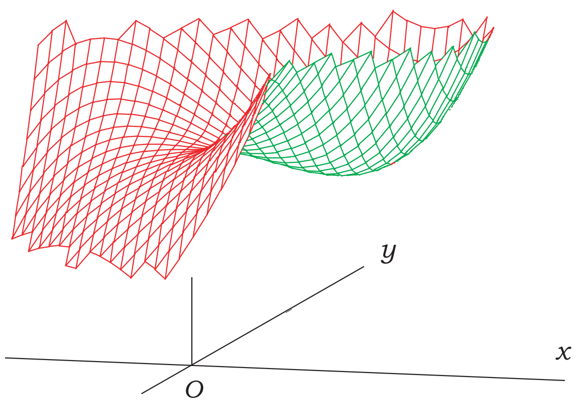
$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\det H(0,0) = -1, \qquad \det H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 3.$$

したがって, $(0,0)$ は鞍点であり, 極値を与えない. 一方, $(1/3, 1/3)$ では極値を与えるが, $f_{xx}(1/3, 1/3) > 0$ よりそれは極小値. まとめると,

$$\text{極小値: } f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}, \qquad \text{極大値: なし.}$$



(2) $f(x,y) = x^4 - y^2$ とおく. 簡単な計算によって,

$$f_x = 4x^3, \qquad f_y = -2y.$$

極値を求めるために, まず, $f_x = f_y = 0$ となる点を求めると, 直ちに $(x,y) = (0,0)$ が出る. 次に, 2 階導関数

$$f_{xx} = 12x^2, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = -2.$$

からヘッシアンは,

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

したがって, $\det H(0,0) = 0$ となるから, 極値の判定ができない.

そこで, 関数そのものを見直すと, $x^2 - y^2$ と似ているのではないかとの予想がたつだろう. $y = 0$ と固定して関数の変化を調べると,

$$f(x,0) = x^4$$

であるから $x = 0$ で極小値. また, $x = 0$ と固定して関数の変化を調べると,

$$f(0,y) = -y^2$$

であるから $y = 0$ で極大値. よって, $f(0,0) = 0$ は $(0,0)$ への近づき方によって極大にも極小にも見える. よって, $(0,0)$ は鞍点であり, 極値を与えない. 結局, $f(x,y)$ には極値はない.

(3) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ とおくと,

$$f_x = 8x^3 - 6xy, \qquad f_y = -3x^2 + 2y.$$

$f_x = f_y = 0$ となる点を求めると $(x,y) = (0,0)$ のみ. 次に, 2 階導関数

$$f_{xx} = 24x^2 - 6y, \qquad f_{xy} = -6x \qquad f_{yy} = 2.$$

からヘッシアンは,

$$H = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}.$$

さて,

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから $\det H(0,0) = 0$. つまり, $(0,0)$ で極値を与えるかどうかの判定はできない.

$y = 0$ とおいて関数の変化を見ると,

$$f(x,0) = (-x^2)(-2x^2) = 2x^4$$

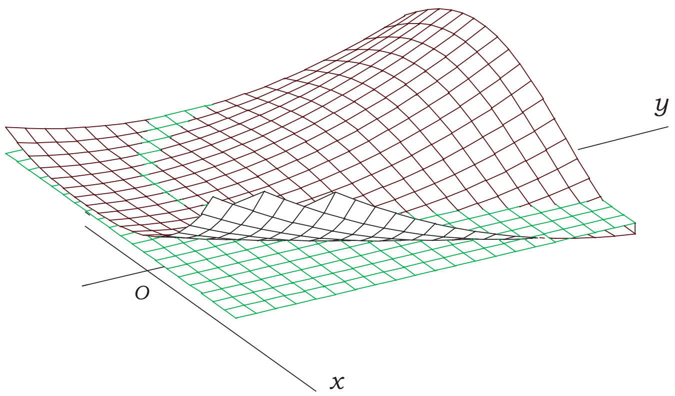
から, $x = 0$ は極小値になる. 一方, $y = \frac{3}{2}x^2$ に沿って関数の値を調べると,

$$f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{4}x^2.$$

したがって, $x = 0$ において極大になる. つまり, $f(0,0) = 0$ は $(0,0)$ への近づき方によって極大にも極小にも見える. よって, $f(0,0)$ は極値ではない. 結局, $f(x,y)$ は極値をもたない.

(注意) $(0,0)$ は鞍点ではない.

関連問題 直線 $y = mx$ に沿って関数 $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ の変化を調べよ. x の 1 変数関数として $x = 0$ において極値になっているか? 次に, $z = f(x,y)$ のグラフの概形を考察せよ.



21 辺の長さの総和が一定である直方体のうちで体積最大のものを求めよ. ただし, 直方体は 12 本の辺をもつ.

解説 直方体は3つの異なる直交方向の辺の長さによって決定される. それらの長さを x, y, z とおこう. 辺の長さの総和を $4L$, 体積を V とすると,

$$L = x + y + z, \qquad V = xyz.$$

したがって,

$$V = V(x,y) = xy(L - x - y), \qquad x, y > 0, \quad x + y < L,$$

の最大値を求めればよい.

$$V_x = Ly - 2xy - y^2, \qquad V_y = Lx - 2xy - x^2.$$

$V_x = V_y = 0$ を解くが, 上の定義域の中にある解は,

$$(x, y) = \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$$

のみである. これが, 最大値を与えることは「直感」では明らかであるが, 計算によって確認しておこう (これが数学).

$$V_{xx} = -2y, \qquad V_{xy} = L - 2x - 2y, \qquad V_{yy} = -2x.$$

よって, ヘッシアンは,

$$H\left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2L/3 & -L/3 \\ -L/3 & -2L/3 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\det H\left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{3}L^2 > 0.$$

これと

$$V_{xx}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{12}\right)=-\frac{2L}{3}<0$$

を合わせると, $V(L/3,L/3)$ は極大値になっている. 一方, $V(x,y)$ の定義域の境界では $V=0$ であるから, これは最大値にはならない. よって, 唯一見つけた極大値が V の最大値である :

$$V_{\max}=V\left(\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)=\frac{L^3}{27}$$

[別解] $V(x,y)$ の定義域を

$$D=\{(x,y)\,;\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq L\}$$

に拡張する. D は有界閉集合, V は D 上の連続関数であるから, 一般論によって V は D 上で最大値をとる.

$$V(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\partial D=D\ \text{の境界}$$

であり,

$$V(x,y)>0,\qquad (x,y)\in D^\circ=D\ \text{の内部}$$

であるから, V は D の内部で最大値をとる. V の最大値を与える点を $(x_1,y_1)\in D^\circ$ とすると, その点で,

$$V_x(x_1,y_1)=V_y(x_1,y_1)=0$$

である. 一方で, D° において, 偏微分が 0 となる点は $\left(\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)$ のみである. よって,

$$V_{\max}=V\left(\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)=\frac{L^3}{27}.$$

[別解] ラグランジュの未定係数法によって, $V(x,y,z)=xyz$ の条件 $x+y+z=L$ のもとでの極値を求める. まず, x,y,z は実数であるとする.

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-L)$$

とおく.

$$\begin{aligned}F_x&=yz+\lambda,\\F_y&=zx+\lambda,\\F_z&=xy+\lambda,\\F_\lambda&=x+y+z-L,\end{aligned}$$

である.

$$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$$

を解くと,

$$(x,y,z,\lambda)=(L,0,0,0),\ (0,L,0,0),\ (0,0,L,0),\ \left(\frac{L}{3},\frac{L}{3},\frac{L}{3},-\frac{L^2}{9}\right)$$

したがって,

$$(L,0,0),\ (0,L,0),\ (0,0,L),\ \left(\frac{L}{3},\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)$$

の 4 点が極値を与える候補となる. 一方, 題意から $V(x,y,z)$ の定義域として

$$E = \{(x,y,z)\,;\, x+y+z=L,\, x\geq 0,\, y\geq 0,\, z\geq 0\}$$

を考える. これは有界閉集合であるから, V は E 上で最大値をとる. 最大値を与える点は, 上に求めた 4 つの中にある.

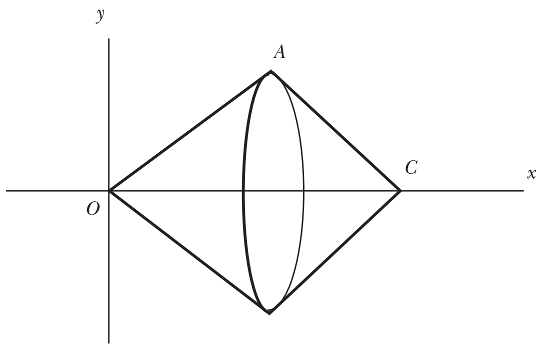
$$V(L,0,0)=V(0,L,0)=V(0,0,L)=0, \qquad V\left(\frac{L}{3},\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)=\frac{L^3}{27}$$

であるから, 最大値は

$$V_{\max}=V\left(\frac{L}{3},\frac{L}{3},\frac{L}{3}\right)=\frac{L^3}{27}$$

である.

22 平面上に 3 点 $O(0,0)$, $A(a,b)$, $C(c,0)$ をとる. ただし, $0<a<c$, $b>0$. この 3 点からできる折れ線 OAC を x-軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ. 次に, 折れ線の長さを一定値 L に保ちながら ($\overline{OA}+\overline{AC}=L$), A,C の位置を変化させるとき, 得られる回転体の体積が最大になるのはどのような場合か? そのときの体積も求めよ.



解説 問題の回転体は円錐を 2 つ接着したものであるから, 体積は

$$V=\frac{\pi b^2 a}{3}+\frac{\pi b^2(c-a)}{3}=\frac{\pi}{3}\,b^2 c. \tag{22.1}$$

折れ線の長さは $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(c-a)^2+b^2}$ であるから, a,b,c のみたすべき条件は,

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(c-a)^2+b^2}=L \tag{22.2}$$

となる. ラグランジュの未定係数法によって V の (22.2) のもとでの条件付極値を求めよう [このやりかたを習得するための練習問題]. そのために

$$F(a,b,c,\lambda)=\frac{\pi}{3}\,b^2c+\lambda(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(c-a)^2+b^2}-L)$$

とおく. 簡単な計算によって,

$$
\begin{aligned}
F_a &= \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\lambda(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} \\
F_b &= \frac{2\pi}{3}\,bc + \frac{\lambda b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\lambda b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} \\
F_c &= \frac{\pi}{3}\,b^2 + \frac{\lambda(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} \\
F_\lambda &= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(c-a)^2+b^2} - L
\end{aligned}
$$

が得られる. $F_a = F_b = F_c = F_\lambda = 0$ を解こう:

$$\frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\lambda(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = 0 \tag{22.3}$$

$$\frac{2\pi}{3}\,bc + \frac{\lambda b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\lambda b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = 0 \tag{22.4}$$

$$\frac{\pi}{3}\,b^2 + \frac{\lambda(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = 0 \tag{22.5}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(c-a)^2+b^2} = L \tag{22.6}$$

まず, (22.3) から

$$\lambda = 0 \quad \text{または} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = 0.$$

(case 1) $\lambda = 0$. これを (22.4)–(22.6) に代入して

$$b = 0, \quad c = L, \quad a : \text{任意} \tag{22.7}$$

が得られる.

(case 2) $\lambda \neq 0$ のときは,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{(c-a)}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} = 0 \tag{22.8}$$

が成り立たねばならない. 2 乗して,

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{(c-a)^2}{b^2+(c-a)^2}.$$

分母を払って整理すると,

$$a^2 = (c-a)^2$$

となり,

$$c = 2a \quad \text{または} \quad c = 0,\ a : \text{任意}.$$

(case 2-1) $c=0$ のときは, (22.8) にもどせば, $a=0$, $b=L/2$. (22.4) に代入すると $\lambda=0$. これは, 今考えている場合の前提条件に矛盾する.

(case 2-2) $c=2a$ の場合を考える. (22.4)–(22.6) に代入して

$$\left(\frac{4\pi}{3}a+\frac{2\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)b=0 \tag{22.9}$$

$$\frac{\pi}{3}b^2+\frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \tag{22.10}$$

$$2\sqrt{a^2+b^2}=L \tag{22.11}$$

(22.11) を (22.9), (22.10) に代入すると,

$$\left(\frac{\pi}{3}a+\frac{\lambda}{L}\right)b=0, \qquad \frac{\pi}{3}b^2+\frac{2\lambda a}{L}=0.$$

$b=0$ とすると, $a\neq 0$ であるから, $\lambda=0$ となり, 最初の前提条件に反する. よって $b\neq 0$ であり,

$$\frac{\pi}{3}a+\frac{\lambda}{L}=0, \qquad \frac{\pi}{3}b^2+\frac{2\lambda a}{L}=0.$$

これと (22.11) から

$$a=\frac{L}{2\sqrt{3}}, \quad b=\pm\frac{L}{\sqrt{6}} \quad c=\frac{L}{\sqrt{3}}, \quad \lambda=-\frac{\pi L^2}{6\sqrt{3}}, \tag{22.12}$$

以上まとめると, $F_a=F_b=F_c=F_\lambda=0$ をみたす (a,b,c,λ) は (22.7) と (22.12) で尽きる. 一方, 拘束条件 (22.2) は (a,b,c)-空間内の有界閉集合であるから, その上で, V は最大値をもつ. その点では, $F_a=F_b=F_c=F_\lambda=0$ をみたすが, (22.7) のとき, $V=0$ であるから最大値にはなりえない. よって最大値は, (22.12) の場合である. そのときの体積は,

$$V_{\max}=\frac{\pi}{3}\left(\frac{L}{\sqrt{6}}\right)^2\frac{L}{\sqrt{3}}=\frac{\pi L^3}{18\sqrt{3}}.$$

[別解 1] (22.1) より V は, b,c で表されているが, これを a,c 変数に書き直すレポートがあったので解説する. (22.2) から

$$a^2+b^2=L^2-2L\sqrt{(c-a)^2+b^2}+(c-a)^2+b^2.$$

これを b^2 について解くと,

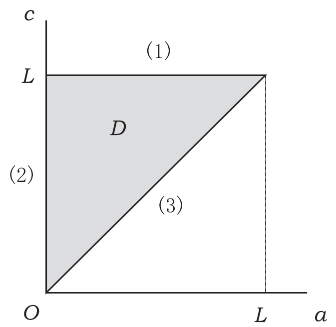
$$b^2=\left(\frac{L^2-2ac+c^2}{2L}\right)^2-(c-a)^2.$$

これを (22.1) に代入して,

$$V=\frac{\pi c}{3}\left(\frac{L^2}{4}+ac-a^2-\frac{c^2}{2}+\frac{a^2c^2}{L^2}-\frac{ac^3}{L^2}+\frac{c^4}{4L^2}\right).$$

a,c の変域は

$$D=\{(a,c)\,;\,0\le a\le c\le L\}$$



であるから, V の D における最大値を求めればよい. D は有界閉集合であるから, V には最大値が存在する. D の境界は 3 つの線分からなる. それぞれの線分上での V の最大値を求める (試みよ). (1) 上では $V = 0$ ゆえ最大値も 0. (2) 上では

$$V = \frac{\pi c}{3}\left(\frac{L^2}{4} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{4L^2}\right) = \frac{\pi}{12L^2}\,c(c^2 - L^2)^2, \qquad 0 \le c \le L.$$

この最大値は, $c = \dfrac{L}{\sqrt{5}}$ のときで, $\dfrac{4\sqrt{5}}{3\cdot 5^3}\,\pi L^3$. (3) 上では, $a = c$ なので,

$$V = \frac{\pi c}{3}\left(\frac{L^2 - c^2}{2L}\right)^2 = \frac{\pi}{12L^2}\,c(L^2 - c^2)^2, \qquad 0 \le c \le L.$$

これは, (2) と同一である. 次に, D の内部における最大値を求める. 計算によって, D の内部には $V_a = V_c = 0$ を満たす点がただ 1 つだけ存在し, それは

$$(a, c) = \left(\frac{L}{2\sqrt{3}}, \frac{L}{\sqrt{3}}\right). \tag{22.13}$$

そのとき,

$$V\left(\frac{L}{2\sqrt{3}}, \frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi L^3}{18\sqrt{3}}. \tag{22.14}$$

これは, 境界上の最大値より大きい. よって, V の最大値は D の内部にある. その点では, $V_a = V_c = 0$ であるが, そのような点は, (22.13) で与えられる 1 点だけである. よって, その点での値 (22.14) は V の最大値である.

[別解 2] 別解 1 のような発想に至るのであれば, V を a, c 変数に書き直すなど面倒なことをせず, 直接 b, c 変数のまま扱えばよかろう. ポイントは, b, c の変域を押さえることである.

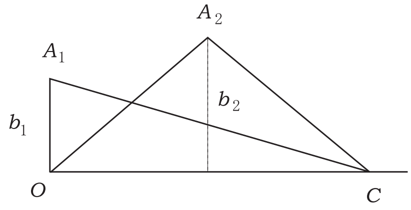
まず, 題意より $0 \le c \le L$ は明らか. そのような c をとって, C を固定したとき, b はどのような範囲の値をとりうるかを図形的に考察する.

明らかに, $b_1 \le b \le b_2$. 図から, b_1, b_2 は次の等式を満たす:

$$b_1 + \sqrt{b_1^2 + c^2} = L, \qquad 2\sqrt{b_2^2 + \frac{c^2}{4}} = L.$$

解いて,

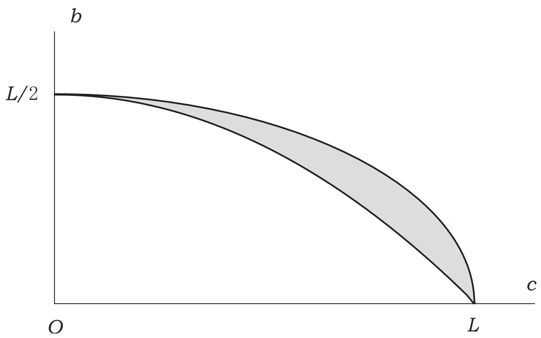
$$b_1 = \frac{L^2 - c^2}{2L}, \qquad b_2 = \frac{\sqrt{L^2 - c^2}}{2}.$$



よって, $V = V(b,c)$ の定義域は,

$$D = \left\{ (b,c)\,;\ \frac{L^2 - c^2}{2L} \le b \le \frac{\sqrt{L^2 - c^2}}{2},\ 0 \le c \le L \right\}.$$

これは放物線と楕円に囲まれた下図のような領域である.



ところで,

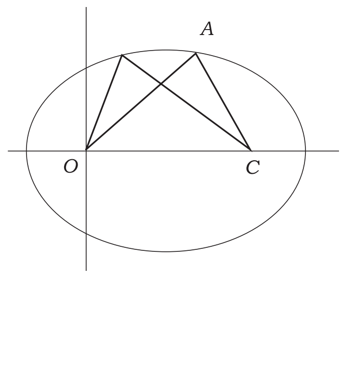
$$V = \frac{\pi}{3} b^2 c$$

を思い出せば, 同じ c に対しては b が大きいほど V の値は大きい. よって, 求めるべき V の最大値は, D の境界のうち上側にあるほうでとられている. 上側の境界上で V を c の関数として表すと,

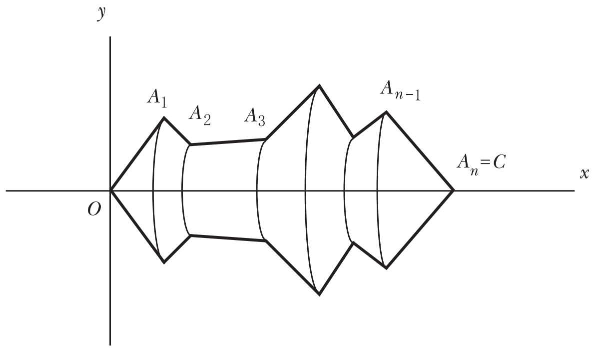
$$V = \frac{\pi}{12} c(L^2 - c^2), \qquad 0 \le c \le L.$$

この関数の最大値を求めればよい (試みよ).

注意 C を固定したとき, $OA + AC = L$ を満たす A の軌跡は, O, C を焦点とする楕円である. C を固定したとき, どこに A をとれば体積が最大になるかは容易にわかる. その最大値を c の関数として表し, 最大値を求めても良い. (これが最も容易な解法であろう.)



関連問題 上の問題の状況を $n+1$ 個の点からなる折れ線の場合に一般化して同様の問題を考察せよ. $n \to \infty$ の極限ではどうか?



23 関数 $f(x,y) = (x^2-4x)(y^2-y)$ について次の問の答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の $(3,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

解説 (1) まず, $f(x,y)$ は多項式であるから何回でも連続的に偏微分可能である (C^∞-級という). よって, 全微分可能であって,

$$df = f_x dx + f_y dy$$

が成り立つ. 偏微分を計算して

$$f_x = (2x-4)(y^2-y), \qquad f_y = (x^2-4x)(2y-1).$$

したがって,

$$df = (2x-4)(y^2-y)dx + (x^2-4x)(2y-1)dy.$$

(2) 全微分の式が接平面を端的に表現している. 接平面は,

$$z - f(3,2) = f_x(3,2)(x-3) + f_y(3,2)(y-2)$$

で与えられるから, 数値を代入計算して,

$$z + 6 = 4(x-3) - 9(y-2).$$

整理して,

$$4x - 9y - z = 0.$$

(3) まず, $f_x = f_y = 0$ となる点を求める.

$$(2x-4)(y^2-y) = 0, \qquad (x^2-4x)(2y-1) = 0$$

の第 1 式から $x=2$, $y=0$, $y=1$ の 3 通りを考えればよいことがわかる．それぞれを第 2 式に代入して, $(2,1/2)$, $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,1)$, $(4,1)$ を得る．次に,

$$f_{xx}=2(y^2-y), \qquad f_{xy}=(2x-4)(2y-1), \qquad f_{yy}=2(x^2-4x)$$

からヘッシアンは

$$H=\begin{pmatrix} 2(y^2-y) & 2(x-2)(2y-1) \\ 2(x-2)(2y-1) & 2(x^2-4x) \end{pmatrix}.$$

さて, 求めた 5 つの点において,

$$H\left(2,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \qquad H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(4,0)=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(4,1)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\det H(2,\frac{1}{2})=8>0, \quad f_{xx}(2,\frac{1}{2})=-1<0$$

より, $f\left(2,\frac{1}{2}\right)=1$ は極大値.

$$\det H(0,0)=\det H(4,0)=\det H(0,1)=\det H(4,1)=-16<0$$

より, これらの 4 点は鞍点であり極値を与えない.

24 周の長さ L が一定の直角 3 角形のうちで面積が最大のものを求めよ.

解説 直角 3 角形の直角をはさむ 2 辺の長さを x,y とすると, 残りの辺の長さは $\sqrt{x^2+y^2}$ である．よって, 周の長さ L の条件から, x,y の満たす条件は

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=L, \qquad x>0, \qquad y>0$$

となる．一方, 直角 3 角形の面積 S は

$$S=S(x,y)=\frac{1}{2}xy$$

となり, S の条件 $g(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}-L=0$ のもとでの条件付極値問題に帰着する．ラグランジュの未定係数法を用いるために,

$$F(x,y,\lambda)=S(x,y)+\lambda g(x,y)=\frac{1}{2}xy+\lambda(x+y+\sqrt{x^2+y^2}-L)$$

とおく. 簡単な計算から

$$F_x = \frac{y}{2} + \lambda\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
$$F_y = \frac{x}{2} + \lambda\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
$$F_\lambda = x + y + \sqrt{x^2+y^2} - L.$$

極値を与える (x, y) は連立方程式

$$\frac{y}{2} + \lambda\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0, \tag{24.1}$$
$$\frac{x}{2} + \lambda\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0, \tag{24.2}$$
$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} - L = 0 \tag{24.3}$$

の解の中にある. (24.1) と (24.2) の差を考えると,

$$(x-y)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

これより

$$y = x \qquad \text{または} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ の場合は, (24.1) に代入すれば,

$$y + x + \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

となる. 考えている領域では $x > 0$, $y > 0$ であるからこの式は成り立たない. よって, $y = x$ の場合を考えれば十分である. (24.3) から,

$$x = y = \frac{L}{2+\sqrt{2}}.$$

そのとき, 三角形は直角二等辺三角形であり, 面積は

$$S = \frac{1}{2}\,xy = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{L^2}{4(3+2\sqrt{2})}.$$

これが最大値であることは次のような議論をすればよい. まず, S の定義域を閉集合に拡張する.

$$S(x,y) = \frac{1}{2}\,xy, \quad D = \left\{(x,y)\,;\, x + y + \sqrt{x^2+y^2} - L = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

($x \geq 0$, $y \geq 0$ に注目.) D は有界閉集合なので, S は D 上で最大値をもつ (存在の保証). $x=0$ または $y=0$ においては $S=0$ であり, それ以外では $S>0$ である. よって, S の最大値は,

$$D^\circ = \left\{(x,y)\,;\, x+y+\sqrt{x^2+y^2}-L=0,\ x>0,\ y>0\right\}$$

に存在する. それは条件付極値のはずである. しかるに, 上で求めたように, 条件付極値は1個しかなかったのでそれが最大値である.

[別解] 束縛条件 $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=L$ を y について解いて,

$$y = \frac{L(L-2x)}{2(L-x)}.$$

よって,

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{L(L-2x)x}{4(L-x)}, \qquad 0<x<\frac{L}{2}$$

の最大値問題を解いても良い.

25 変数変換 $\Phi : (u,v) \mapsto (x,y)$ が

$$x = \frac{v}{u}, \qquad y = uv$$

によって定義されている. 以下の問に答えよ.

(1) $0<a<b$, $c>0$ を定数とする. xy-平面の領域 D と uv-平面の領域 E を

$$D = \{(x,y)\,;\, ax \leq y \leq bx,\ 0 \leq xy \leq c\},$$
$$E = \{(u,v)\,;\, \Phi(u,v) \in D\}$$

で定義する. D, E を図示せよ.

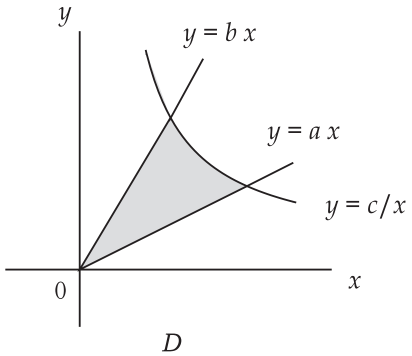
(2) 変換 Φ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

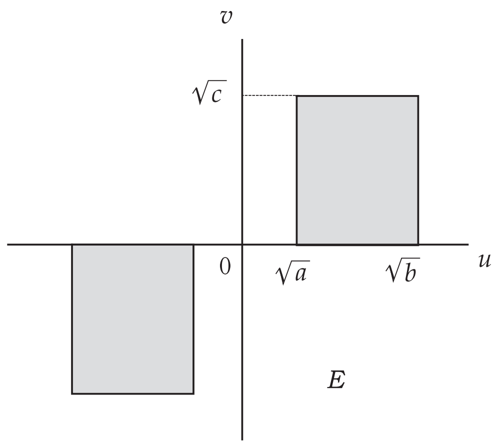
(3) 次の積分を変数変換 Φ を用いて計算せよ.

$$\iint_D e^{xy}\,dxdy.$$

解説 問題 7 と同じなので, 答えのみを記す.

(1) $E = \{(u,v)\,;\, \sqrt{a} \leq u \leq \sqrt{b},\ 0 \leq v \leq \sqrt{c}\} \cup \{(u,v)\,;\, -\sqrt{b} \leq u \leq -\sqrt{a},\ -\sqrt{c} \leq v \leq 0\}$.





(2) $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} -v/u^2 & 1/u \\ v & u \end{pmatrix} = -\dfrac{2v}{u}.$

(3) $\dfrac{1}{2}(\log b - \log a)(e^c - 1).$

26 次の積分を計算せよ. ただし, $n = 0, 1, 2, \ldots$ である.

$$\iiint_K x^{2n} y^2 dxdydz, \qquad K = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

解説 空間極座標で計算する. 通常どおり,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

とおこう. K を表す (r,θ,φ) の領域は

$$E = \{(r,\theta,\varphi)\,;\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin\theta$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
\iiint_K x^{2n} y^2 dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)^{2n}(r\sin\theta\sin\varphi)^2 r^2 \sin\theta, drd\theta d\varphi \\
&= \iiint_E r^{2n+4}(\sin\theta)^{2n+3}(\cos\varphi)^{2n}(\sin\varphi)^2 drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^1 r^{2n+4}dr \int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n+3}d\theta \int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{2n}(\sin\varphi)^2 d\varphi.
\end{aligned}$$

まず,

$$\int_0^1 r^{2n+4}dr = \frac{1}{2n+5}.$$

次に,

$$\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n+3}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+3}d\theta = 2\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots\frac{2}{3}. \tag{26.1}$$

また,

$$\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{2n}(\sin\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{2n}(1-\cos^2\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos^{2n}\varphi - \cos^{2n+2}\varphi)d\varphi$$

であるが,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{26.2}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^{2n}(\sin\varphi)^2 d\varphi &= 4\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right)\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}&\iiint_K x^{2n}y^2 dxdydz\\ &\quad= \frac{1}{2n+5}\times 2\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\\ &\quad= \frac{1}{2n+5}\times 2\times\frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{1}{2n+1}\times\frac{\pi}{n+1}\\ &\quad= \frac{4\pi}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.\end{aligned}$$

(26.1) や (26.2) は, 多少面倒ではあるが, (漸化式を用いる) 初等的な計算である.

[別解] 求める積分は, 積分領域の対称性によって,

$$\iiint_K z^{2n}y^2 dxdydz$$

に等しい. これを極座標に変換すれば,

$$\iiint_K z^{2n}y^2 dxdydz = \int_0^1 r^{2n+4}dr\int_0^{\pi}(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^3 d\theta\int_0^{2\pi}(\sin\varphi)^2 d\varphi. \tag{26.3}$$

言い換えれば, 与えられた積分を, 通常の極座標ではなく, x, z を入れ替えた極座標で変換したことになる. これによって, (26.1) や (26.2) を回避でき, 三角関数の計算がかなり簡単になる. (26.3) の 3 つの積分を計算しよう. まず,

$$\int_0^1 r^{2n+4}dr = \frac{1}{2n+5}, \qquad \int_0^{2\pi}(\sin\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \pi,$$

は容易.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^3 d\theta &= \int_0^\pi (\cos\theta)^{2n}(1-\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta \\
&= \int_0^\pi (\cos^{2n}\theta - \cos^{2n+2}\theta)\sin\theta\, d\theta \\
&= \left[-\frac{\cos^{2n+1}\theta}{2n+1} + \frac{\cos^{2n+3}\theta}{2n+3}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3} = \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\iiint_K z^{2n}y^2 dxdydz = \frac{1}{2n+5} \times \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} \times \pi = \frac{4\pi}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

関連問題 次の積分を計算せよ.

$$\iiint_K x(y^2+z^2)^n\, dxdydz, \qquad K = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0\}.$$

(答) $\dfrac{\pi}{2(n+1)(n+2)}$

27 関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について次の問の答えよ.

(1) f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ.

(2) $f_x = f_y = 0$ を満たす点をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた点は $f(x,y)$ の極値を与えるか?

解説 (1) 計算だけである. まず,

$$\begin{aligned}
f_x &= ye^{-x^2-y^2} + xy(-2x)e^{-x^2-y^2} = (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2}, \\
f_y &= xe^{-x^2-y^2} + xy(-2y)e^{-x^2-y^2} = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= -4xye^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)y(-2x)e^{-x^2-y^2} = 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2}, \\
f_{xy} &= (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)y(-2y)e^{-x^2-y^2} = (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, \\
f_{yy} &= x(-4y)e^{-x^2-y^2} + x(1-2y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から,

$$(1-2x^2)ye^{-x^2-y^2} = 0, \qquad x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} = 0$$

を解けばよい.

$$(0,0),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(3) ヘッシアン

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

を調べよう.

$$H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

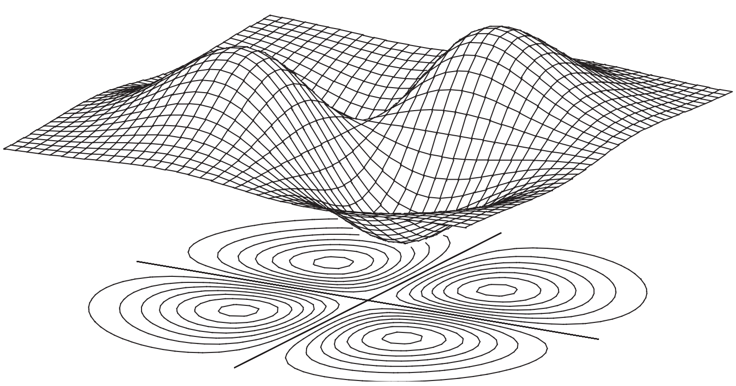
$$H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix},\quad H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$\det H(0,0)=-1<0$ なので $(0,0)$ は鞍点であり, 極値を与えない.

$$\det H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\det H\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4e^{-2}>0$$

であるから, これらの点は極値を与える. f_{xx} の符号を調べて,

$$\text{極小点}:\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \text{極大点}:\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



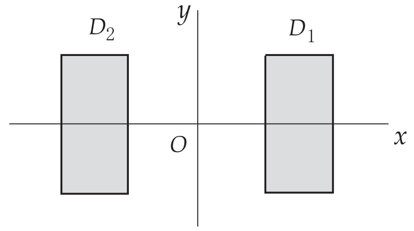
(注意) 等高線がにじんで交わっているように見えるが, 本当は同心円状になっている.

28 次の主張は間違っている. (i) どこが間違いかを具体的に指摘し, (ii) 正しい主張に直して, (iii) それを証明せよ.

(1) 平面の領域 $D=\{(x,y)\,;\,1<|x|<2,\ |y|<1\}$ 上定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が偏微分可能で, すべての点 $(x,y)\in D$ で $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ ならば, ある定数 c が存在して, $f(x,y)=c$ がすべての点 $(x,y)\in D$ で成り立つ.

(2) 直線 $y=mx$ に沿って関数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$ の変化を調べると, m によらず, $(0,0)$ で極小値をとっているので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値を取る. よって, $f(x,y)\ge f(0,0)$ が成り立つ.

解説 (1) 領域 D が連結ではない, つまり, D 内の 2 点が必ずしも曲線で結べないことが誤りのもと.



$$D_1 = \{(x, y)\,;\, 1 < x < 2,\ |y| < 1\}, \qquad D_2 = \{(x, y)\,;\, -2 < x < -1,\ |y| < 1\},$$

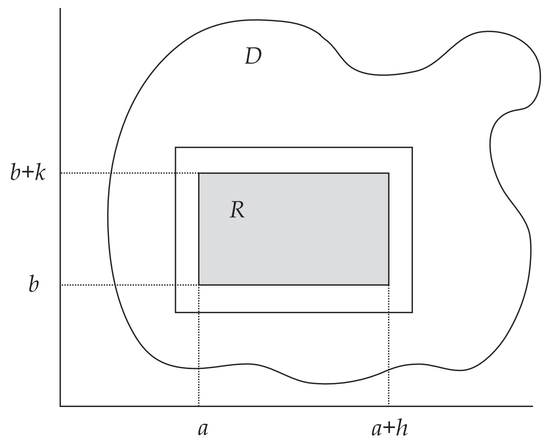
とおくと, D_1, D_2 は連結であり, $D = D_1 \cup D_2$. したがって, D_1, D_2 上のそれぞれで別の定数をとることが可能になる.

正しい主張の例: (i) 平面の領域 $D = \{(x, y)\,;\, 1 < x < 2,\ |y| < 1\}$ 上定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ が偏微分可能で, すべての点 $(x, y) \in D$ で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ ならば, ある定数 c が存在して, $f(x, y) = c$ がすべての点 $(x, y) \in D$ で成り立つ.

(ii) 平面の領域 $D = \{(x, y)\,;\, 1 < |x| < 2,\ |y| < 1\}$ 上定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ が偏微分可能で, すべての点 $(x, y) \in D$ で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ ならば, ある定数 c_1, c_2 が存在して,

$$f(x, y) = \begin{cases} c_1 & (x, y) \in D_1, \\ c_2 & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

証明: (i) を一般化して, 連結な D に対して考えよう. 考えている領域 D 内に 2 点 (a, b), $(a + h, b + k)$ をとり, それらを頂点とする図のような長方形 R を考える (長方形というときは周も含む閉集合を考えるものとする).



さらに R を少し大きくした長方形を D 内にとる. 拡大幅と h, k を小さく取れば, このような配置は常に可能である. さて, 1 変数関数

$$\varphi(t) = f(a + th, b),$$

を考える. $[0,1]$ を含む開区間が定義域になり, 仮定から微分可能である. 1 変数関数だから, 微分可能なので連続である. よって, $\varphi(t)$ は $[0,1]$ 上で連続, $(0,1)$ 上で微分可能である. さらに仮定から, $\varphi'(t)=0$. よって, (平均値の定理から) $\varphi(t)$ は $[0,1]$ 上で定数である. この定数を c とおくと,

$$f(a+th,b)=c, \qquad 0\le t\le 1.$$

この議論を

$$\psi(t)=f(a,b+tk)$$

に適用して, $\psi(0)=f(a,b)=c$ に注意すれば,

$$f(a,b+tk)=c, \qquad 0\le t\le 1. \tag{28.1}$$

最後に, $b<b_1<b+k$ となる b_1 を 1 つ固定して,

$$\varphi_1(t)=f(a+th,b_1)$$

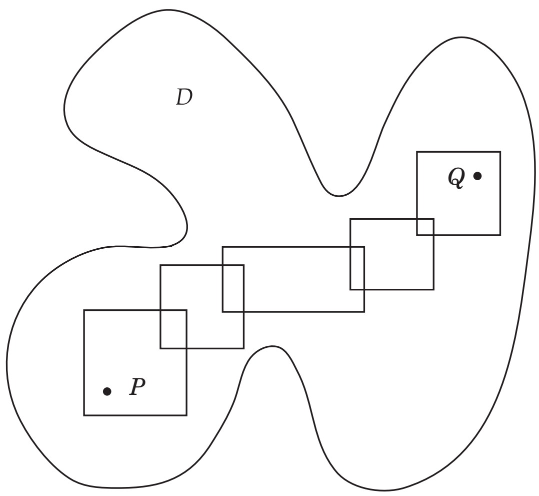
を考えると, $\varphi_1(t)$ も定数である. さらに, (28.1) より $\varphi_1(0)=f(a,b_1)=c$ ゆえ,

$$\varphi_1(t)=f(a+th,b_1)=c, \qquad 0\le t\le 1.$$

これは, 長方形 R 上で $f(x,y)$ が定数であることを示す:

$$f(x,y)=c, \qquad \text{すべての } (x,y)\in R.$$

最後に, D 内の任意の 2 点 P, Q を図のように長方形で連結すれば, $f(P)=f(Q)=c$ がわかる.



(2) 直線に沿って $f(x,y)$ が $(0,0)$ で極小値であるからといって, それが $f(x,y)$ の極小値であるとは限らない. 2 変数関数の極値は, 直線に沿ってだけ調べるのでは不十分. 次に極小値であるからといって最小値であるとは言えない.

正しい主張の例: 直線 $y = mx$ に沿って関数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ の変化を調べると, m によらず, $(0, 0)$ で極小値をとっているが, $f(0, 0)$ は $f(x, y)$ の極小値ではない. また, $f(x, y)$ には最小値は存在しない.

証明: (i) 直線 $y = mx$ に沿って関数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ の変化を調べると, m によらず, $(0, 0)$ で極小値をとっていること. 実際,

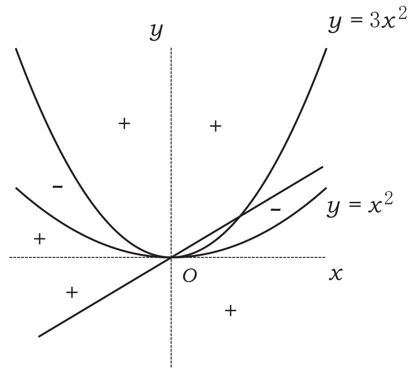
$$\varphi(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = x^2(m - x)(m - 3x)$$

を x で微分すると,

$$\varphi'(x) = 2x(m - x)(m - 3x) - x^2(m - 3x) - 3x^2(m - x) = 2x(6x^2 - 5mx + m^2).$$

したがって, $\varphi'(0) = 0$ である. さらに, m によらず, $x = 0$ の前後で $\varphi'(x)$ の符号は, $-$ から $+$ に変化する. よって, $\varphi(0)$ は極小値である.

(ii) $f(0, 0)$ は $f(x, y)$ の極小値ではない. $f(x, y)$ の符号を調べると, 図のようになっている.



特に,

$$D = \{(x, y)\,;\, x^2 < y < 3x^2\}$$

とおくと, D 上で $f(x, y) < 0$ である. 一方, D には, いくらでも $(0, 0)$ に近い点が存在する. よって, $(0, 0)$ のどんな近傍 U をとっても, U は D の点を含む. 言い換えれば, $(0, 0)$ のどんな近傍 U をとってもその近傍には $f(x, y) < 0$ を満たす点が存在する. したがって, $f(0, 0) = 0$ は極小値でない.

(i) のように直線上で $f(x, y)$ の値を調べるのが不十分であるのは, 図からもわかる. つまり, どんな傾きの直線 $y = mx$ を考えても, 原点の近くでは $f(x, y) < 0$ となる領域を通過しないのである.

(iii) $f(x, y)$ には最小値は存在しない. (ii) と同様の考え方で, 今度は $x \to \infty$ とすると,

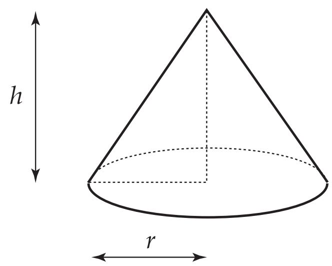
$$\lim_{x\to\infty} f(x, \alpha x^2) = \lim_{x\to\infty} x^4(\alpha - 1)(\alpha - 3) = -\infty, \qquad 1 < \alpha < 3.$$

よって, 関数 $f(x, y)$ には最小値は存在しない.

29 一般に xyz 座標空間の領域 K に対して,

$$x_0 = \frac{1}{V(K)} \iiint_K x\,dxdydz,$$
$$y_0 = \frac{1}{V(K)} \iiint_K y\,dxdydz,$$
$$z_0 = \frac{1}{V(K)} \iiint_K z\,dxdydz$$
$$V(K) = \iiint_K dxdydz,$$

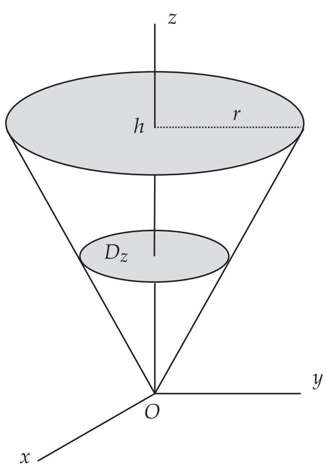
とおくとき, (x_0, y_0, z_0) を K の重心という. 図のような, 底面の半径が r, 高さが h の円錐の重心の位置を求めよ.



解説 図のように円錐を配置すると, 円錐の側面の方程式は,

$$z = \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}$$

となる.



一般に, K 上の 3 重積分は,

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^h dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

となる．これに基づいて，積分を計算してゆけばよい．なお，D_z は半径 $\dfrac{r}{h}z$ の円である．

$$\begin{aligned} V(K) &= \iiint_K dxdydz = \int_0^h dz \iint_{D_z} dxdy \\ &= \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}z\right)^2 dz = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$

次に，

$$\iiint_K xdxdydz = \int_0^h dz \iint_{D_z} xdxdy$$

を考えよう．

$$\iint_{D_z} xdxdy = \int_{-rz/h}^{rz/h} dy \int_{-\sqrt{(rz/h)^2-x^2}}^{\sqrt{(rz/h)^2-x^2}} xdx = 0.$$

よって，

$$\iiint_K xdxdydz = 0.$$

同様に，

$$\iiint_K ydxdydz = 0.$$

最後に，

$$\begin{aligned} \iiint_K zdxdydz &= \int_0^h z\,dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^h z\pi\left(\frac{r}{h}z\right)^2 dz \\ &= \int_0^h z\pi\left(\frac{r}{h}z\right)^2 dz = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^2}{4}. \end{aligned}$$

こうして，

$$x_0 = y_0 = 0, \qquad z_0 = \frac{\pi r^2 h^2}{4}\Big/\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3}{4}h.$$

したがって，円錐の重心は，頂点と底面の中心を 3:1 に内分する点にある．底面の半径によらないことが面白い．

[補足] $V(K)$ の公式は既知，$x_0 = y_0 = 0$ は対称性から明らか，とする答案も正解とした．

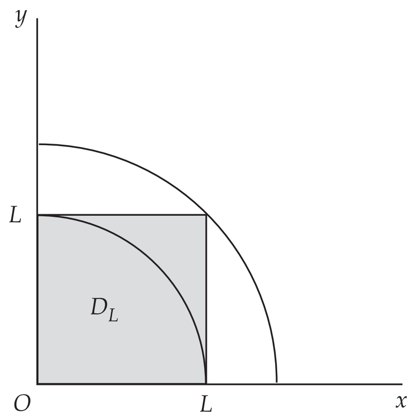
30　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{L\to\infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3}, \qquad D_L = \{(x,y)\,;\, 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L\}.$$

解説　極限をとる前の積分

$$\iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3}$$

を計算するのは困難である．D_L の内側と外側に図のような四分円をとる．



簡単のため,

$$E_L = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq L^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

とおく.

$$E_L \subset D_L \subset E_{\sqrt{2}L}$$

であり, 被積分関数は ≥ 0 であるから,

$$\iint_{E_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3} \leq \iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3} \leq \iint_{E_{\sqrt{2}L}} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3}. \tag{30.1}$$

さて, E_L 上の積分を極座標で計算しよう.

$$\begin{aligned}\iint_{E_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^L \frac{rdr}{(1+r^2)^3} \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}(1+r^2)^{-2}\right]_0^L = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{1}{(1+L^2)^2}\right).\end{aligned}$$

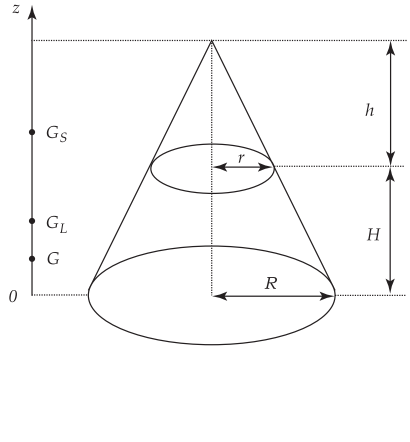
したがって, (30.1) は,

$$\frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{1}{(1+L^2)^2}\right) \leq \iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3} \leq \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{1}{(1+2L^2)^2}\right).$$

ここで $L \to \infty$ とすると, 両側は同じ値 $\dfrac{\pi}{8}$ に収束するので, はさみうちの原理で,

$$\lim_{L\to\infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{\pi}{8}.$$

関連問題 上面の半径が r, 下面の半径が R, 高さが H の円錐台の重心の位置を求めよ.



(答) 下面から $\dfrac{H(R^2+2rR+3r^2)}{4(R^2+rR+r^2)}$ の位置. [問題 29 の結果を利用するとよい.]

関連問題 次の図形の重心の位置を求めよ.

$$K=\left\{(x,y,z)\,;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^\alpha}{c^\alpha}\le 1,\ z\ge 0\right\}$$

(答) $\left(0,0,\dfrac{c(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}\right)$