2003 年度 解析学 B (C22202) 期末試験問題

実施: 2003. 2. 10 (火) 2 講時

- 解答は整然と文章によって記せ．式だけ・答だけは採点対象外とする．(Make up logical and clear sentences. Answers by only equations and symbols are exempt from marking.)
- 読めない解答は採点から除外する．(Illegible answers are immediately exempt from marking.)
- 下記の 4 問から 3 問だけを選択解答せよ． (Select and answer just three among the four questions.)

1. 次の主張は間違っている．(i) どこが間違いかを具体的に指摘し, (ii) 正しい主張に直して, (iii) それを証明せよ．(The following statements are false. (i) Describe explicitly the wrong points, (ii) correct the statements and (iii) give the proofs.)

(1) 平面の領域 $D = \{(x, y)\,;\, 1 < |x| < 2,\ |y| < 1\}$ 上定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ が偏微分可能で, すべての点 $(x, y) \in D$ で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ ならば, ある定数 c が存在して, $f(x, y) = c$ がすべての点 $(x, y) \in D$ で成り立つ．(Let $f(x, y)$ be a partially differentiable function on $D = \{(x, y)\,;\, 1 < |x| < 2,\ |y| < 1\}$. If $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ for all $(x, y) \in D$, there exists a constant number c such that $f(x, y) = c$ holds for all $(x, y) \in D$.)

(2) 直線 $y = mx$ に沿って関数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ の変化を調べると, m によらず, $(0, 0)$ で極小値をとっているので, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極小値を取る．よって, $f(x, y) \geq f(0, 0)$ が成り立つ．(Since along the line given by $y = mx$ the function $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ has a minimum at $(0, 0)$ for any m, $f(0, 0)$ is a minimal value of $f(x, y)$. Therefore, $f(x, y) \geq f(0, 0)$ holds.)

2. 関数 $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ について次の問の答えよ．(Answer the following questions on the function $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$.)

(1) f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ．(Find the derivatives f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}.)

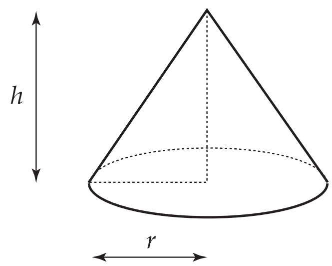
(2) $f_x = f_y = 0$ を満たす点をすべて求めよ．(Find the points satisfying $f_x = f_y = 0$.)

(3) (2) で求めた点は $f(x, y)$ の極値を与えるか? (Does $f(x, y)$ take extreme values at those points found in (2)?)

3. 一般に xyz 座標空間の領域 K に対して,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{V(K)} \iiint_K x \, dxdydz, \\ y_0 &= \frac{1}{V(K)} \iiint_K y \, dxdydz, \\ z_0 &= \frac{1}{V(K)} \iiint_K z \, dxdydz \\ V(K) &= \iiint_K dxdydz, \end{aligned}$$

とおくとき, (x_0, y_0, z_0) を K の重心という. 図のような, 底面の半径が r, 高さが h の円錐の重心の位置を求めよ. (The center of gravity of a domain K in the xyz-coordinate space is given by (x_0, y_0, z_0). Find the center of gravity of the following cone with height h and radius r.)



4. 次の極限値を求めよ. (Compute the following limit.)

$$\lim_{L \to \infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^3}, \qquad D_L = \{(x, y)\,;\, 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L\}.$$

ヒント：計算しやすい別の領域における積分値と比較するのも一法. (Hint: Compare the above integral with the computable one over another domain.)