

2003 年 (平成 15 年) 度前期
解析学 C : 問題と解説

大学院情報科学研究科
尾畑 伸明 (担当教官)

はじめに 2003 年度前期に開講した工学部 2 年生向「微分方程式入門」で出題したレポート問題・小テスト・期末試験とその解説を掲載する。

教科書：劔持勝衛・水原 廣「微分方程式」共立出版, 2003.

1 次の曲線群を図示し, それらが共通に満たす微分方程式を導け.

(1) $y = Ce^{-x^2}$ (2) $y = \tan(x + C)$ (3) $x^2 - Cx - y = 0$

解説 (1) 1 回微分して, $y' = C(-2x)e^{-x^2} = -2xy$. よって, 求める微分方程式は $y' = -2xy$.

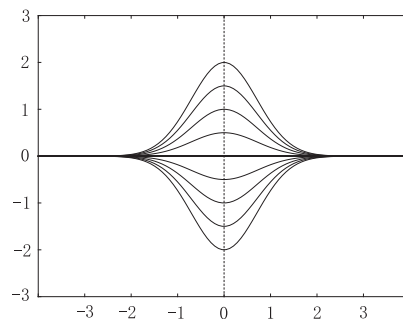


図 1.1: $C = 0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 1.5, \pm 2$

(2) 1 回微分すれば,

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + C)} = 1 + \tan^2(x + C) = 1 + y^2.$$

よって, 求める微分方程式は $y' = 1 + y^2$.

(3) x で 1 回 微分して,

$$2x - C - y' = 0.$$

よって $C = 2x - y'$. これを元の式に代入して,

$$x^2 - (2x - y')x - y = 0.$$

整理して,

$$xy' - x^2 - y = 0.$$

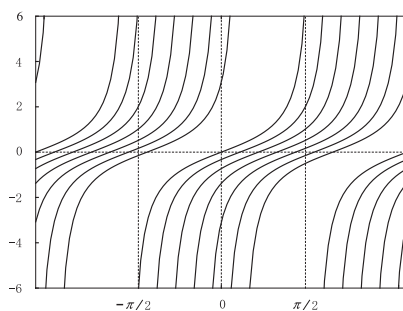


図 1.2: $C = 0, -\pi/10, -2\pi/10, -3\pi/10, -4\pi/10, -5\pi/10, -6\pi/10$

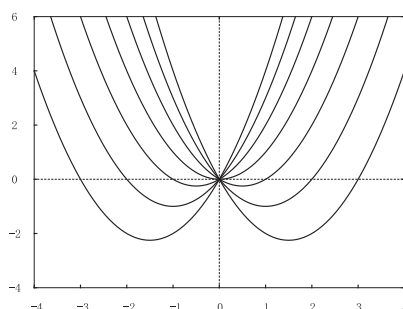


図 1.3: $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

2 ある市場における CD の売り上げを説明するモデルを考える. ある時刻 $t \geq 0$ における売り上げ総数を $y(t)$ とする. 単位時間当たりの売り上げ枚数は $y(t)$ に比例すると考えて, 微分方程式

$$y'(t) = ky(t), \quad k > 0 \text{ は比例定数} \quad (2.1)$$

をたてた. しかし, この方程式の解は $t \rightarrow \infty$ で $y(t) \rightarrow \infty$ となり現実に合わない. そこで, 市場の大きさ $M > 0$ (定数) と時刻 t における CD 未購入者 (これから買ってくれそうな人) 数 $M - y(t)$ を考慮し, $y(t)$ は $M - y(t)$ にも比例するとして, 新たに

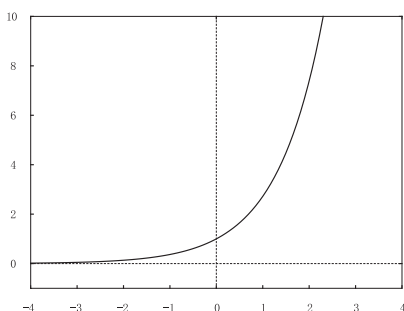
$$y'(t) = ky(t)(M - y(t)), \quad k > 0 \text{ は比例定数} \quad (2.2)$$

を考えた. 次の問に答えよ.

- (1) 微分方程式 (2.1) を解き, 解曲線を図示せよ.
- (2) 微分方程式 (2.2) を解き, 解曲線を図示せよ.

解説 (1) 変数分離型である. 容易に解けて $y = Ce^{kt}$ (C は任意の定数).

(2) 自明な解 $y = 0$ と $y = M$ (これらは定数関数) に注意しておく. 与えられた方程式は

図 2.1: $C = k = 1$

変数分離型である.

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

として,

$$\frac{dy}{y(M - y)} = kdt. \quad (2.3)$$

左辺の積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y(M - y)} &= \int \frac{1}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M - y} \right) dy \\ &= \frac{1}{M} (\log |y| - \log |M - y|) \\ &= \frac{1}{M} \log \left| \frac{y}{M - y} \right|. \end{aligned}$$

(2.3) の右辺の積分と等置して,

$$\frac{1}{M} \log \left| \frac{y}{M - y} \right| = kt + C.$$

よって,

$$\left| \frac{y}{M - y} \right| = e^{M(kt+C)} = e^C e^{Mkt}.$$

さらに,

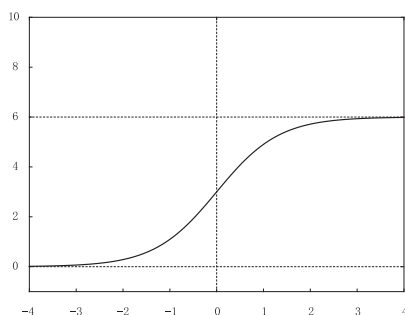
$$\frac{y}{M - y} = \pm e^C e^{Mkt}.$$

ここで $\pm e^C$ を改めて定数 C とおくことにする. $C \neq 0$ なる任意の定数である. y について解いて,

$$y = \frac{CM e^{kMt}}{1 + C e^{kMt}} = \frac{CM}{C + e^{-kMt}}.$$

$C = 0$ を代入すると自明な解の 1 つである $y = 0$ を表す. よって, 求める解は,

$$y = \frac{CM}{C + e^{-kMt}} \quad C \text{ は任意の定数}, \quad y = M. \quad (2.4)$$

図 2.2: $C = 1, M = 6, k = 1/4$

となる.

(注意) 自明な解のうち $y = M$ は一般解 (2.4) の C を調整しても得ることはできないが, 一般解で $C \rightarrow \pm\infty$ とすれば $y = M$ となる. 一方, (2.4) において,

$$y = \frac{M}{1 + C^{-1}e^{-kMt}}$$

と変形して, C^{-1} をあらためて C とおけば,

$$y = \frac{M}{1 + Ce^{-kMt}} \quad C \text{ は任意の定数,}$$

の形で一般解が得られる. $C = 0$ ととれば自明な解 $y = M$ が得られるが, 今度は C をどのようにとっても自明な解 $y = 0$ を表示することができない.

3 次の微分方程式を解き, 解曲線を図示せよ. (図示が困難であれば, その理由を記してもよい.)

$$(1) y' \sin 2x = y \cos 2x \quad (2) xy' = 3x + 3y \quad (3) y' = \frac{y+x}{y-x}$$

解説 (1) 変数分離形である.

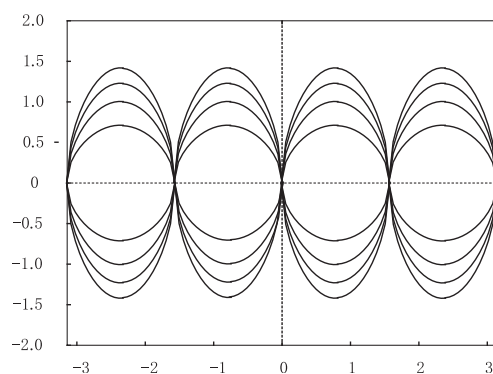
$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx$$

と変形して, 両辺を積分する.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx \implies \log |y| = \frac{1}{2} \log |\sin 2x| + C.$$

したがって,

$$2 \log |y| = \log |\sin 2x| + 2C = \log e^{2C} |\sin 2x| \implies y^2 = e^{2C} |\sin 2x|.$$

図 3.1: $C = \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 1.5, \pm 2.0$

$\pm e^{2C}$ をあらためて C とおき直して,

$$y^2 = C \sin 2x \quad C \text{ 任意定数}$$

(注意) $\frac{y'}{y} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$ と変形して, 両辺を x で積分すると,

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx.$$

計算して $2 \log |y| = \log |\sin 2x| + C$. 後は同じ.

(2) 両辺を x で割って,

$$y' - \frac{3}{x} y = 3 \quad (3.1)$$

となり, 1 階線形方程式である. まず,

$$y' - \frac{3}{x} y = 0 \quad (3.2)$$

を解く. これは変数分離形であるから,

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{x} dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{x} dx.$$

積分を計算して,

$$\log |y| = 3 \log |x| + C \implies |y| = C|x|^3 \implies y = Cx^3.$$

(3.1) を解くために定数変化法を用いる. 解を $y = C(x)x^3$ と想定して, (3.1) に代入すると,

$$C'x^3 + 3Cx^2 - \frac{3}{x}Cx^3 = 3 \implies C'x^3 = 3$$

したがって,

$$C' = \frac{3}{x^3} \implies C(x) = -\frac{3}{2x^2} + K \quad K \text{ は任意定数}$$

したがって、求める解は、

$$y = \left(-\frac{3}{2x^2} + K \right) x^3 = -\frac{3}{2}x + Kx^3.$$

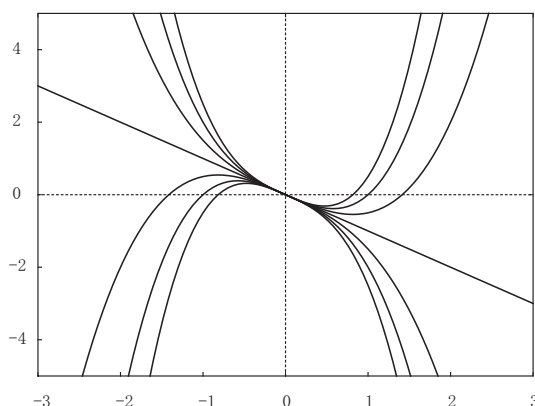


図 3.2: $K = 0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 1.5$

(3) これは同次形である. $y = xu$ において与えられた方程式に代入すると、

$$u + xu' = \frac{xu + x}{xu - x} = \frac{u + 1}{u - 1}.$$

よって、

$$xu' = \frac{u + 1}{u - 1} - u = \frac{-u^2 + 2u + 1}{u - 1}.$$

これは変数分離型である.

$$\frac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1} du = \frac{dx}{x} \quad (3.3)$$

左辺の積分は

$$\int \frac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1} du = -\frac{1}{2} \int \frac{(-u^2 + 2u + 1)'}{-u^2 + 2u + 1} du = -\frac{1}{2} \log |-u^2 + 2u + 1|$$

である. よって, (3.3) は,

$$-\frac{1}{2} \log |-u^2 + 2u + 1| = \int \frac{dx}{x} = \log |x| + C \implies \frac{1}{-u^2 + 2u + 1} = Cx^2.$$

変数を元に戻して、

$$Cx^2 = \frac{1}{-(y/x)^2 + 2(y/x) + 1} = \frac{x^2}{-y^2 + 2yx + x^2} \implies x^2 + 2xy - y^2 = C$$

(補足) 2次曲線 $ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f = 0$ は標準的な方法で描くことができる (線型代数で学ぶことが多い).

$x^2 + 2xy - y^2 = C$ は次のようにする.

$$x = X \sin \theta - Y \cos \theta, \quad y = X \cos \theta + Y \sin \theta,$$

と置き換えてみよう. これは, (x, y) -座標軸を θ 回転させて (X, Y) -座標軸を作ったことを意味する.

$$\begin{aligned} C &= (X \sin \theta - Y \cos \theta)^2 + 2(X \sin \theta - Y \cos \theta)(X \cos \theta + Y \sin \theta) - (X \cos \theta + Y \sin \theta)^2 \\ &= X^2(\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \\ &\quad + XY(-2 \cos \theta \sin \theta - 2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + Y^2(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= X^2(\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \\ &\quad + 2XY(-2 \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &\quad + Y^2(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= X^2(\sin 2\theta - \cos 2\theta) - 2XY(\sin 2\theta + \cos 2\theta) - Y^2(\sin 2\theta - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

ここで,

$$\sin 2\theta - \cos 2\theta = 0$$

となるように $\theta = \pi/8$ を選べば X^2, Y^2 の係数が消える. そのとき, 得られた式は,

$$C = -2XY(\sin 2\theta + \cos 2\theta) = -2\sqrt{2}XY.$$

定数をおきなおせば, 求めるべき解曲線は双曲線群 $XY = C$ である.

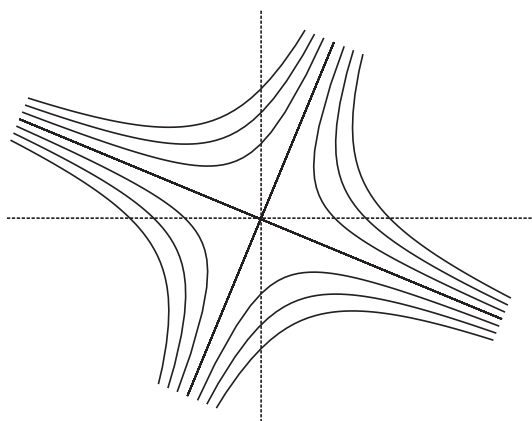


図 3.3:

4 次の微分方程式を, 表示してある変数変換を用いて解け.

$$(1) \quad xy' = e^{-xy} - y \quad (xy = u) \quad (2) \quad y' = (x + e^x - 1)e^{-y} \quad (x + e^y = v)$$

解説 (1) $xy = u$ から $y + xy' = u'$. よって与えられた方程式は,

$$u' - y = e^{-u} - y \implies u' = e^{-u} \implies e^u du = dx.$$

これは変数分離形であり, 積分して,

$$e^u = x + C$$

変数を元に戻して,

$$e^{xy} = x + C \implies y = \frac{\log(x + C)}{x}$$

として一般解が得られる. $C = 1$ のときは, $x = 0$ でも連続関数になるが, それ以外の C に対しては, $x = 0$ は不連続点.

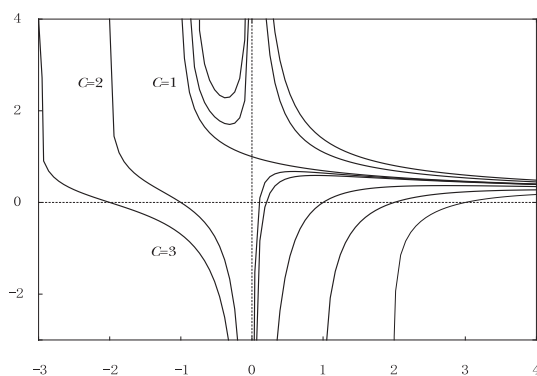


図 4.1: $C = -1, -2, 0, 0.8, 0.9, 1, 2, 3$

(2) $x + e^y = v$ の両辺を x で微分して,

$$1 + y'e^y = v'$$

与えられた微分方程式を $y'e^y + 1 = x + e^x$ と変形して,

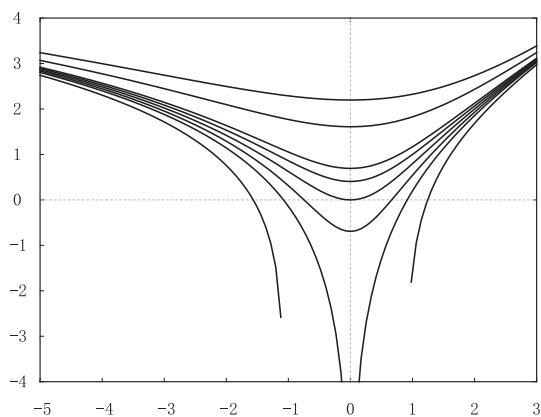
$$v' = x + e^x$$

が得られる. 積分して,

$$v = \frac{x^2}{2} + e^x + C.$$

よって,

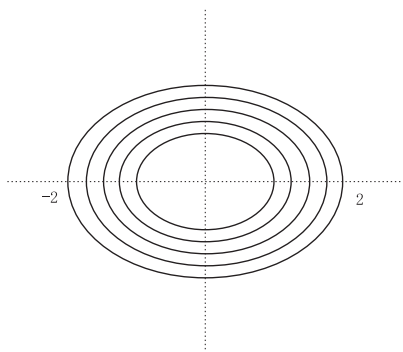
$$x + e^y = \frac{x^2}{2} + e^x + C \implies y = \log\left(\frac{x^2}{2} - x + e^x + C\right).$$

図 4.2: $C = 0, \pm 0.5, \pm 1, 4, 8, -2$

5 次の方程式で表される曲線群 (C が任意定数) を図示し, それらが満たす完全微分方程式を求めよ.

(1) $x^2 + 2y^2 = C$ (2) $\cosh(x^3y) = C$ (3) $\tan x = C \tan y$

解説 (1) 微分してから, 両辺を 2 で割って, $xdx + 2ydy = 0$.

図 5.1: $x^2 + 2y^2 = C, C = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$

(2) $\cosh(x^3y) = C$ ということは $x^3y = C$ と同じこと. 微分して,

$$3x^2ydx + x^3dy = 0. \quad (5.1)$$

(3) $\frac{\tan x}{\tan y} = C$ と変形して微分する.

$$\frac{1}{\tan y} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \tan x \frac{-1}{\tan^2 y} \frac{1}{\cos^2 y} dy = 0$$

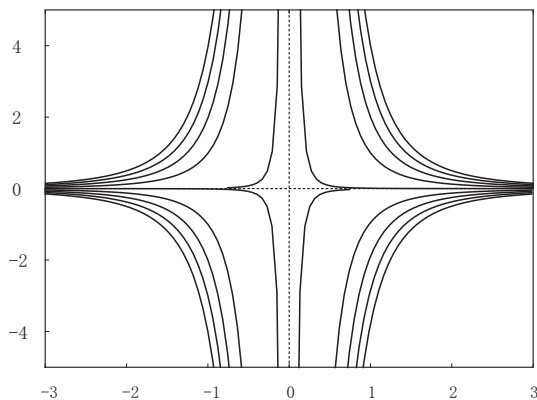


図 5.2: $x^3y = C$, $C = \pm 0.01, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$

となるから整理して,

$$\frac{1}{\cos^2 x \tan y} dx - \frac{\tan x}{\sin^2 y} dy = 0 \quad (5.2)$$

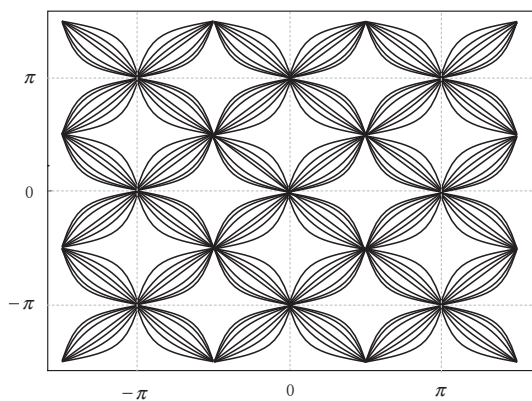


図 5.3: $\tan x = C \tan y$, $C = \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 0.75, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$

(注意) (5.1) から $3ydx + xdy = 0$ と変形すると, これは完全形でなくなる! しかし,

$$\frac{3}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0$$

ならよい.

また, (5.2) を整理したつもりになって,

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{\tan x}{\tan y \cos^2 y} dy = 0$$

などすると完全形でなくなる!

(注意) $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ が完全形でなくとも, 両辺にある関数 $\lambda(x, y)$ を掛けて,

$$\lambda(x, y)f(x, y)dx + \lambda(x, y)g(x, y)dy = 0$$

が完全形になることがありうる. 方程式としては同じでも変形することで完全形になったり, ならなかったりする. 上の $\lambda(x, y)$ を積分因子という.

6 次の全微分方程式は完全であることを示し, その解を求めよ.

$$(1) (3x^2 - e^y)dx - xe^y dy = 0 \quad (2) \sinh x \cos y dx = \cosh x \sin y dy$$

$$(3) 3re^{3\theta}d\theta + e^{3\theta}dr = 0$$

解説 $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ が完全形であるための条件は,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

であるから, これを直接確かめればよい. (1)–(3) とともに容易に確かめられ, 解 $u(x, y) = C$ は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y),$$

の関係式から, 視察によって解がすぐわかる. 公式 (教科書 p. 12) を用いてもよい.

$$(1) x^3 - xe^y = C$$

$$(2) \cosh x \cos y = C$$

$$(3) re^{3\theta} = C$$

7 次の微分方程式を解き, 解曲線を図示せよ.

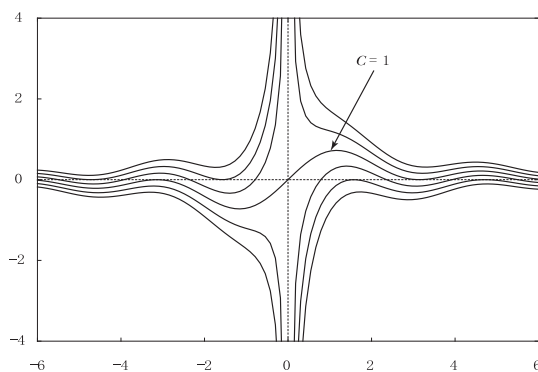
$$(1) xy' + y = \sin 2x \quad (2) x^2y' + 2xy - x + 1 = 0$$

解説 (1) まず, $xy' + y = 0$ を解いて, $y = \frac{C}{x}$. 次に, 与えられた方程式の解を

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

と想定して解く (定数変化法).

$$xy' + y = x \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = C'(x)$$

図 7.1: $C = 0, \pm 1, \pm 2, +3$

なので,

$$C'(x) = \sin 2x$$

に帰着された. これを解いて $C(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$. よって, 求める解は,

$$y = \frac{-\cos 2x + C}{2x}.$$

$C = 1$ のときは $x = 0$ でも連続, そのほかの C に対しては $x = 0$ は不連続点.

(2) まず, $x^2 y' + 2xy = 0$ を解いて, $y = \frac{C}{x^2}$. 次に, 与えられた方程式の解を

$$y = \frac{C(x)}{x^2}$$

と想定して解く (定数変化法). 与えられた方程式に代入して

$$C'(x) - x + 1 = 0.$$

これを解いて,

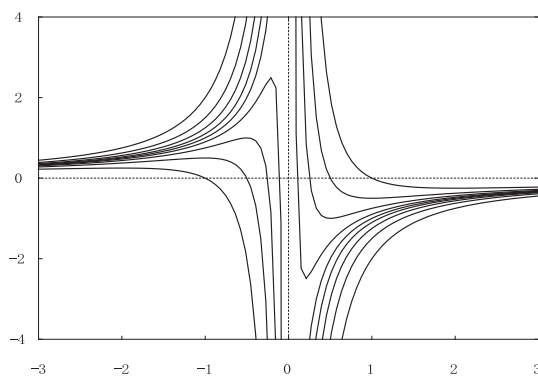
$$C(x) = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

よって, 求める解は,

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

8 (1) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $P(x_0, y_0)$ で交わっているとき, P におけるそれぞれの接線が作る角度 θ はどのようにして求められるか? 自分で作った具体例をまじえて説明せよ.

(2) 曲線群 $y = Cx^2$ を図示せよ. これらの曲線すべてに直交する曲線を求めよ.

図 7.2: $C = 0, \pm 0.1, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 1$

解説 (1) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の $(P(x_0, y_0))$ における接線の傾きは, それぞれ, $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ で与えられる. それらの接線と x 軸とのなす角を θ_1 , θ_2 とすれば,

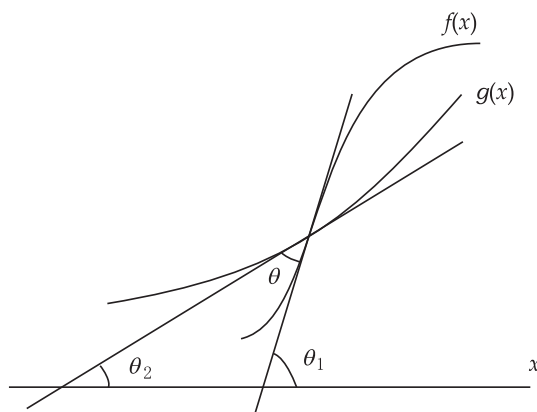
$$f'(x_0) = \tan \theta_1, \quad g'(x_0) = \tan \theta_2,$$

が成り立つ. 2接線のなす角 θ は $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$ によって求められる.

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

であるから,

$$\tan |\theta| = \frac{|\tan \theta_1 - \tan \theta_2|}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{|f'(x_0) - g'(x_0)|}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$



(2) 曲線 $y = f(x) = Cx^2$ の満たす微分方程式は,

$$y' = 2Cx = 2x \times \frac{y}{x^2}$$

から

$$y' = \frac{2y}{x}$$

のように求められる. つまり, 点 (x, y) において曲線群は傾き $2y/x$ をもつことになる. よって, 与えられた曲線群に直交する曲線の方程式を $y = g(x)$ とおくと,

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

を満たす. これを解いて, 直交曲線群の方程式

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C, \quad C \text{ は任意定数.}$$

9 微分方程式

$$4y'' + 4y' + 5y = 0 \tag{E2}$$

について次の問に答えよ.

(1) (E2) の一般解を求めよ.

(2) 条件 $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$ を満たす (E2) の解を求めて, 関数 $y = y(x)$ のグラフの概形 $(-\infty < x < +\infty)$ を美しく描け.

解説 (1) 特性方程式

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

を解いて, $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$. よって基本解は, $\{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}, e^{(-\frac{1}{2}-i)x}\}$. 一般解は,

$$y = C_1 e^{(-\frac{1}{2}+i)x} + C_2 e^{(-\frac{1}{2}-i)x}.$$

実数を扱っているなので, もう少し整理するのが良い.

$$y = C_1 e^{-x/2} (\cos x + i \sin x) + C_2 e^{-x/2} (\cos x - i \sin x).$$

実部を取り出して, あらためて任意定数を C_1, C_2 とすれば,

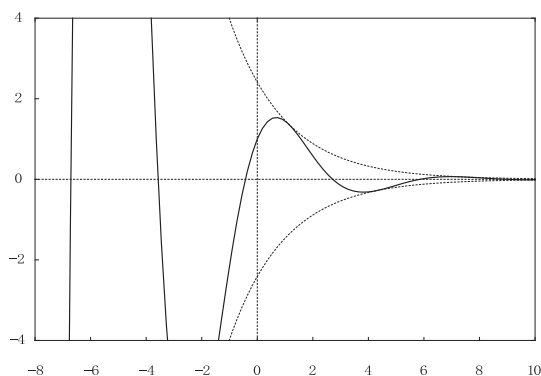
$$y = e^{-x/2} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(2) 条件を (1) の解に代入して,

$$1 = C_1, \quad 1 = e^{-\pi/4} C_2$$

よって求める特殊解は,

$$y = e^{-x/2} (\cos x + e^{\pi/4} \sin x).$$



10 微分方程式

$$y'' - y' - 6 = -7 \sin x - \cos x + 2 \sin 2x - 10 \cos 2x \quad (\text{E1})$$

について次の問に答えよ.

- (1) $y'' - y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ.
- (2) (E1) の特殊解を 1 つ求めよ. (右辺の形から三角関数の線形結合と想定するとよい.)
- (3) (E1) の一般解を求めよ.
- (4) 初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 6$ を満たす (E1) の解を求めて, 関数 $y = y(x)$ のグラフの概形を美しく描け.

解説 (1) 特性方程式 $\rho^2 - \rho - 6 = 0$ を解いて $\rho = 3, -2$. よって, 基本解は $\{e^{3x}, e^{-2x}\}$ で, 求める一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

(2) $y = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x + d \cos 2x$ と想定して, a, b, c, d の連立方程式に持ち込めばよい. $y = \sin x + \cos 2x$ が得られる.

(3) (1) の一般解と (2) の特殊解の和として求められる.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \sin x + \cos 2x.$$

(4) (3) より,

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + 1.$$

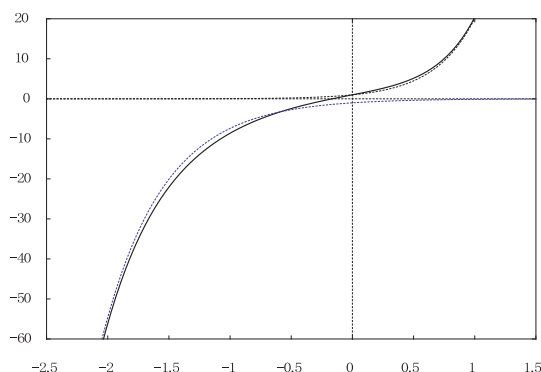
また, $y' = 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} + \cos x - 2 \sin 2x$. よって,

$$6 = y'(0) = 3C_1 - 2C_2 + 1.$$

上の 2 式を連立させて解けば, $C_1 = 1, C_2 = -1$. よって求める解は,

$$y = e^{3x} - e^{-2x} + \sin x + \cos 2x.$$

$x > 0$ では e^{3x} が, $x < 0$ では $-e^{-2x}$ がグラフの形をほぼ決めている. $y = y(x)$ のグラフは, それらの指数関数のグラフに絡みつくように振動する.



11 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' = x^2 + 1 - 4\sin 2x - 4\cos 2x$$

(両辺を 1 回積分した方程式も考え合わせるとよい.)

解説 まず, $y'' + 2y' = 0$ を解いて,

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \quad (11.1)$$

が得られる. 特殊解を求めるのに, 計算の便利さのため方程式を 2 つに分けてみる. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と想定して $y'' + 2y' = x^2 + 1$ の解を求めると

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x. \quad (11.2)$$

また, $y = a \sin 2x + b \cos 2x$ と想定して $y'' + 2y' = -4\sin 2x - 4\cos 2x$ の解を求めると

$$y = \cos 2x \quad (11.3)$$

よって求める一般解は (11.1)–(11.3) の和で求められるので,

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x + C_1 + C_2 e^{-2x} + \cos 2x$$

12 微分方程式

$$2x^2y'' - 3xy' - 3y = 0 \quad (12.1)$$

について問の答えよ.

(1) $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ が (E3) の解であれば, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ も解であることを証明せよ.

(2) $y = x^m$ を代入してみよ. それをヒントに (12.1) の一般解を求めよ.

(3) 変数変換 $x = e^t$ によって (12.1) の一般解を求めよ.

解説 (1) $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ を代入計算して直接確かめられる. 方程式 (12.1) が線形であることが本質的である.

(2) $y = x^m$ より, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ となる. これらを (12.1) に代入すると,

$$2x^2m(m-1)x^{m-2} - 3mx^{m-1} - 3x^m = 0.$$

整理して

$$2m(m-1)x^m - 3mx^m - 3x^m = (2m^2 - 5m - 3)x^m = 0.$$

よって,

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \quad (12.2)$$

を満たす m に対して $y = x^m$ は方程式 (12.1) の解となる. (12.2) を解くと $m = 3, -1/2$ なので, $y = x^{-1/2}$ と $y = x^3$ が方程式 (12.1) をみたす. (1) から,

$$y = C_1x^{-1/2} + C_2x^3$$

も方程式 (12.1) をみたすが, 任意定数を 2 つ含んでいることから, これが求めるべき一般解である.

(3) 一般に $y = y(x)$ に変数変換 $x = e^t$ を施して $y = y(e^t)$ が得られるが, これを t の関数としてはっきり区別するために $u(t) = y(e^t)$ とおこう. このとき,

$$\frac{du}{dt} = y'(e^t)e^t, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t.$$

よって,

$$y'(e^t) = e^{-t} \frac{du}{dt}, \quad y''(e^t)e^{2t} = e^{-2t} \frac{d^2u}{dt^2} - e^{-t} y'(e^t) = e^{-2t} \frac{d^2u}{dt^2} - e^{-2t} \frac{du}{dt}. \quad (12.3)$$

方程式 (12.1) に $x = e^t$ を代入すると,

$$2e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) - 3y(e^t) = 0$$

(12.3) を代入して,

$$\left(2 \frac{d^2 u}{dt^2} - 2 \frac{du}{dt}\right) - 3 \frac{du}{dt} - 3u = 2 \frac{d^2 u}{dt^2} - 5 \frac{du}{dt} - 3u = 0$$

が得られる. これは定数係数 2 回線形微分方程式であるから, 特性方程式 $2\rho^2 - 5\rho - 3 = 0$ の根 $\rho = -1/2, 3$ から一般解が

$$u(t) = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{3t}$$

のように求められる. $y(e^t) = u(t)$ であったから,

$$y(x) = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^3$$

が得られる.

(注意) 一般に,

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

をコーシーの方程式またはオイラーの方程式という. $y = x^m$ を代入して得られる m に関する方程式 (上問の (12.2)) を補助方程式という.

13 微分方程式

$$(x+3)y'' - (4x+13)y' + (4x+14)y = (x+4)e^x \quad (13.1)$$

の一般解を次の手順で求めよ.

- (1) $y = u(x)e^{2x}$ とおいて, u に関する微分方程式を導け.
- (2) (1) で導いた微分方程式において, $u' = z$ とおくと z に関する 1 階微分方程式が導かれる. それを求めよ.
- (3) (2) の微分方程式を解き, 順に, u, y を求めよ.

解説 (1) $y = u(x)e^{2x}$ を微分して,

$$y = ue^{2x}, \quad y' = (u' + 2u)e^{2x}, \quad y'' = (u'' + 4u' + 4u)e^{2x}.$$

これらを (13.1) に代入して,

$$(x+3)(u'' + 4u' + 4u)e^{2x} - (4x+13)(u' + 2u)e^{2x} + (4x+14)ue^{2x} = (x+4)e^x.$$

整理して,

$$\begin{aligned} (x+3)u'' + \{4(x+3) - (4x+13)\}u' \\ + \{4(x+3) - 2(4x+13) + (4x+14)\}u = (x+4)e^{-x} \end{aligned}$$

よって,

$$(x+3)u'' - u' = (x+4)e^{-x} \iff u'' - \frac{u'}{x+3} = \frac{x+4}{x+3}e^{-x}.$$

これが求めるべき微分方程式である.

(2) $u' = z$ を代入して,

$$z' - \frac{z}{x+3} = \frac{x+4}{x+3}e^{-x}. \quad (13.2)$$

(3) (13.2) を定数変化法で解いてみよう. まず,

$$z' - \frac{z}{x+3} = 0 \iff \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x+3} = 0.$$

積分して,

$$\log|x| - \log|x+3| = C \iff z = C(x+3).$$

次に, (13.2) の解を $z = u(x)(x+3)$ と想定して求める. $z' = u'(x+3) + u$ を代入して,

$$u'(x+3) + u - \frac{u(x+3)}{x+3} = \frac{x+4}{x+3}e^{-x} \iff u' = \frac{x+4}{(x+3)^2}e^{-x}.$$

よって,

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{x+4}{(x+3)^2} e^{-x} dx = \int \frac{x+3+1}{(x+3)^2} e^{-x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) e^{-x} dx = \int \frac{1}{x+3} e^{-x} dx + \int \frac{1}{(x+3)^2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{x+3}(-e^{-x}) - \int \frac{-1}{(x+3)^2}(-e^{-x})dx + \int \frac{1}{(x+3)^2} e^{-x} dx + C \\ &= -\frac{e^{-x}}{x+3} + C. \end{aligned}$$

したがって, (13.2) の解は,

$$z = u(x+3) = -e^{-x} + C(x+3).$$

$u' = z$ であったから,

$$u = \int z dx = \int \{-e^{-x} + C(x+3)\} dx = e^{-x} + \frac{C}{2}(x+3)^2 + C'.$$

定数をおきなおして

$$u = e^{-x} + C_1(x+3)^2 + C_2.$$

最後に, $y = ue^{2x}$ であったから,

$$\begin{aligned} y &= (e^{-x} + C_1(x+3)^2 + C_2)e^{2x} = e^x + (C_1(x+3)^2 + C_2)e^{2x} \\ &= e^x + (C_1x^2 + 6C_1x + 9C_1 + C_2)e^{2x}. \end{aligned}$$

定数をおきなおして,

$$y = e^x + \{C_1(x^2 + 6x) + C_2\}e^{2x}.$$

14 微分方程式

$$4x^2y'' + 4x^3y' + (x^2 + 1)^2y = 0 \quad (14.1)$$

を $y = u(x)e^{-x^2/4}$ とおいて解け.

解説 $y = u(x)e^{-x^2/4}$ を微分して,

$$y = ue^{-x^2/4}, \quad y' = \left(u' - \frac{x}{2}u\right)e^{-x^2/4}, \quad y'' = \left(u'' - xu' + \frac{x^2 - 2}{4}u\right)e^{-x^2/4}.$$

これらを (14.1) に代入すれば,

$$4x^2 \left(u'' - xu' + \frac{x^2 - 2}{4}u\right)e^{-x^2/4} + 4x^3 \left(u' - \frac{x}{2}u\right)e^{-x^2/4} + (x^2 + 1)^2ue^{-x^2/4} = 0.$$

計算して,

$$4x^2 \left(u'' - xu' + \frac{x^2 - 2}{4}u\right) + 4x^3 \left(u' - \frac{x}{2}u\right) + (x^2 + 1)^2u = 0.$$

さらに, 計算を続ければ,

$$4x^2u'' + u = 0 \quad (14.2)$$

となる. これを解くために $x = e^t \iff t = \log x$ とおいてみる.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dt}.$$

もう 1 度微分して,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2}.$$

(14.2) に代入して,

$$4x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} \right) + u = 0 \iff 4 \frac{d^2u}{dt^2} - 4 \frac{du}{dt} + u = 0.$$

特性方程式は $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 = 0$. よって, 重根 $\lambda = 1/2$ をもち, 一般解は,

$$u = (C_1 + C_2 t)e^{t/2}.$$

$x = e^t$ であったから,

$$u(x) = (C_1 + C_2 \log x)\sqrt{x}.$$

これは $x > 0$ の範囲での一般解である. $x < 0$ の範囲にも解がある. 実際, $x = -e^t$ とおいて同じ議論を繰り返せば, $u(x) = (C_1 + C_2 \log(-x))\sqrt{-x}$ が得られる. 両者をまとめれば,

$$u(x) = (C_1 + C_2 \log |x|)\sqrt{|x|}.$$

最後に, $y = ue^{-x^2/4}$ であったから, 求めるべき一般解は,

$$y = (C_1 + C_2 \log |x|) \sqrt{|x|} e^{-x^2/4}.$$

15 微分方程式

$$x^2 y'' + 4x(x+1)y' + (8x+2)y = \cos x \quad (15.1)$$

に $y = x^n z(x)$ のような変換を施して,

$$z'' + az' + bz = \cos x$$

のような形になるようにしたい. 定数 n, a, b を定めて, もとの微分方程式を解け.

解説 $y = x^n z(x)$ を微分して,

$$y = x^n z, \quad y' = nx^{n-1}z + x^n z', \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}z + 2nx^{n-1}z' + x^n z''.$$

これらを (15.1) に代入して整理すれば,

$$x^n z \{(4n+8)x + n^2 + 3n + 2\} + x^{n+1} z'(2n+4x+4) + x^{n+2} z'' = \cos x.$$

$n = -2$ とおけば,

$$z'' + 4z' = \cos x. \quad (15.2)$$

したがって, $n = -2, a = 4, b = 0$ と定めればよい.

さて, (15.2) を解こう. まず,

$$z'' + 4z' = 0$$

の解は, $z = C_1 + C_2 e^{-4x}$ であることは容易にわかる. (15.2) の特殊解を $z = p \sin x + q \cos x$ と想定して求めよう. (15.2) に代入して,

$$\begin{aligned} -p \sin x - q \cos x + 4p \cos x - 4q \sin x &= \cos x \\ \iff -(p+4q) \sin x + (4p-q) \cos x &= \cos x. \end{aligned}$$

よって,

$$p+4q=0, \quad 4p-q=1 \quad \iff \quad p=\frac{4}{17}, \quad q=-\frac{1}{17}.$$

したがって, (15.2) の一般解は,

$$z = \frac{4}{17} \sin x - \frac{1}{17} \cos x + C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

最後に, $y = x^{-2}z$ によって求める解は,

$$y = x^{-2} \left(\frac{4}{17} \sin x - \frac{1}{17} \cos x + C_1 + C_2 e^{-4x} \right).$$

16 次の関数は、与えられた x の区間 I で一次独立であるか?

(1) $1, x, 1 - |x| \quad I = (-1, 0)$

(2) $1, x, x^2 \quad I = (-1, 1)$

(3) $1, \sin^2 x, \cos^2 x \quad I = (\pi, 2\pi)$

(4) $e^x, xe^x \quad I = (0.01, 0.02)$

解説 $\{f_1, \dots, f_n\}$ が一次独立であることをいうには、

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

が定義域のすべての x について成り立つことを仮定して、 $c_1 = \dots = c_n = 0$ を導けばよい。微分や特定の x における値などを有効に用いると良い。

一方、 $\{f_1, \dots, f_n\}$ が一次独立でない (一次従属である) ことをいうには、ある f_i をほかの $f_1, \dots, f_n$ を用いて表示して見せればよい。

(1) はっきりさせるために、

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = 1 - |x|,$$

とおこう。 $I = (-1, 0)$ において、

$$f_3(x) = 1 - (-x) = 1 + x.$$

よって、

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

のように f_3 が f_1, f_2 の線型結合で表示される。よって、一次独立ではない。

(2) $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$ とおく。

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$$

と仮定する。両辺を微分して、

$$c_2 + 2c_3 x = 0.$$

もう 1 度微分して、

$$2c_3 = 0.$$

よって、元に戻って $c_2 = c_3 = 0$ が従う。つまり、 $\{f_1, f_2, f_3\}$ は一次独立である。

(3) $f_1 = 1, f_2 = \sin^2 x, f_3 = \cos^2 x$ とおく。明らかに、 $f_1 = f_2 + f_3$ が成り立つ。つまり、 f_1 が f_2, f_3 の線型結合で表示される。よって、 $\{f_1, f_2, f_3\}$ は一次独立でない。

(4)

$$c_1 e^x + c_2 x e^x = 0 \quad (16.1)$$

と仮定する. 微分して,

$$c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x = 0. \quad (16.2)$$

(16.1) と (16.2) の差を考えると,

$$c_2 e^x = 0.$$

考えている区間 $(0.01, 0.02)$ において $e^x > 0$ であるから $c_2 = 0$ がわかる. (16.1) に代入すれば, $c_1 = 0$ も出る. よって, $\{e^x, x e^x\}$ は一次独立である.

17 微分方程式

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2 \quad (17.1)$$

を例にとり, ベキ級数による解法を説明せよ.

解説 求めるべき解を

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と想定して解く方法をベキ級数法という. まず,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

に注意しておく. これらを (17.1) に代入すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n.$$

 x^n の係数を比較して,

$$a_1 = 0, \quad (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (17.2)$$

また, 初期条件 $y(0) = 2$ より,

$$a_0 = 2.$$

よって, (17.2) から,

$$a_n = \frac{2}{n} a_{n-2},$$

であるから, n が奇数のときは, $a_1 = 0$ より, $a_n = 0$. $n = 2m$ のときは, $a_0 = 2$ を考慮して,

$$a_{2m} = \frac{2}{2m} a_{2m-2} = \frac{1}{m} a_{2m-2} = \cdots = \frac{1}{m(m-1)\cdots 1} a_0 = \frac{2}{m!}.$$

よって求める解は,

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{m!} x^{2m} = 2e^{x^2}.$$

18 タンク内に A (g) の食塩を含む食塩水 1000 (ℓ) が入っている. このタンクに毎分 50 (ℓ) の割合で, 1 (ℓ) あたり 20 (g) の食塩を含む食塩水が注入され, よく攪拌されながら, 毎分 50 (ℓ) の割合で排出される (つねに全体の量は 1000 (ℓ) に保たれる). このタンク内の食塩の総量は時間の経過とともにどのように変化するか考察せよ.

解説 時刻 t における食塩の総量を $y(t)$ とおく. 時刻 t から Δt 経過する間の食塩の増減を考えよう. 流入する食塩の量は,

$$20 \times 50 \times \Delta t = 1000\Delta t.$$

排出される食塩の量は,

$$y(t) \times \frac{50}{1000} \times \Delta t = \frac{1}{20} y(t) \Delta t.$$

よって,

$$y(t + \Delta) - y(t) = 1000\Delta t - \frac{1}{20} y(t) \Delta t.$$

よって,

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta) - y(t)}{\Delta t} = 1000 - \frac{1}{20} y(t).$$

初期条件をあわせて微分方程式

$$y' = 1000 - \frac{1}{20} y, \quad y(0) = A.$$

少し変形して,

$$(y - 20000)' = -\frac{1}{20} (y - 20000)$$

となり,

$$y - 20000 = Ce^{-t/20} \implies y = Ce^{-t/20} + 20000$$

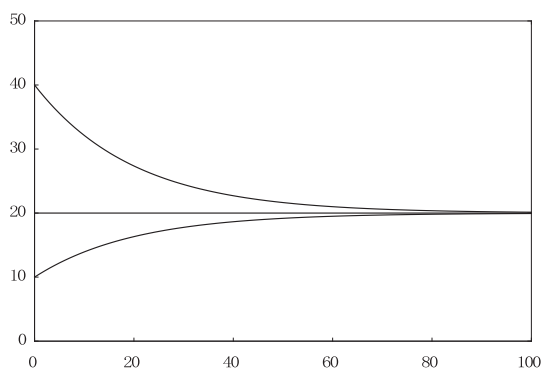
が得られる. 初期条件から, $C + 20000 = A$. よって,

$$y(t) = (A - 20000)e^{-t/20} + 20000$$

いかなる初期条件にあっても, 時間が経過すれば, タンク内の食塩の総量は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 20000$$

に漸近することがわかる.

図 18.1: $A = 10(\times 1000), 40(\times 1000)$

19 ばね定数 4 (N/m) のばねに質量 2 (kg) の重りが吊り下げられている. これを $\gamma \text{ (Ns/m)}$ の抵抗のある媒質の中に入れ, つりあいの位置から下に 0.5 (m) 引いてはなすとき, 重りはどのような運動をするか考察せよ. ただし, つりあいの位置を原点として, 重りの位置を $x \text{ (m)}$ であらわすとき, x は次の微分方程式を満たす:

$$2x'' + \gamma x' + 4x = 0. \quad (19.1)$$

初期条件は, 問題文に適合するように定めよ.

解説 初期条件は

$$x(0) = -0.5, \quad x'(0) = 0.$$

さて, 微分方程式 (19.1) は定係数なので特性方程式

$$2\lambda^2 + \gamma\lambda + 4 = 0$$

によって容易に解ける. まず, 特性方程式の根は,

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4}. \quad (19.2)$$

解の様子を調べるためには, $\gamma^2 - 32$ の符号によって場合分けが必要である.

(Case 1) $\gamma > 4\sqrt{2}$ のとき. (19.2) から,

$$\lambda_1 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4},$$

とおけば, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ であり, (19.1) の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (19.3)$$

が得られる. ここで, 初期条件から

$$-0.5 = x(0) = C_1 + C_2, \quad 0 = x'(0) = -C_1\lambda_1 - C_2\lambda_2$$

を満たす. よって,

$$C_1 = \frac{0.5\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4\sqrt{\gamma^2 - 32}}, \quad C_2 = \frac{-0.5\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4\sqrt{\gamma^2 - 32}}.$$

よって求めるべき解は,

$$x(t) = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4\sqrt{\gamma^2 - 32}} e^{-\lambda_1 t} + \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 32}}{4\sqrt{\gamma^2 - 32}} e^{-\lambda_2 t}.$$

ただし, λ_1, λ_2 は上に与えたものである.

簡単な計算で,

$$x'(t) = \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_1 t} \{1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}\}$$

がわかるから, $t > 0$ の範囲で $x'(t) > 0$ である. つまり, $t \rightarrow \infty$ のとき, 単調につりあいの位置 $x = 0$ に漸近する.

例として,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t}, & \gamma = 6, \\ \frac{1}{14} e^{-4t} - \frac{4}{7} e^{-t/2}, & \gamma = 9. \end{cases}$$

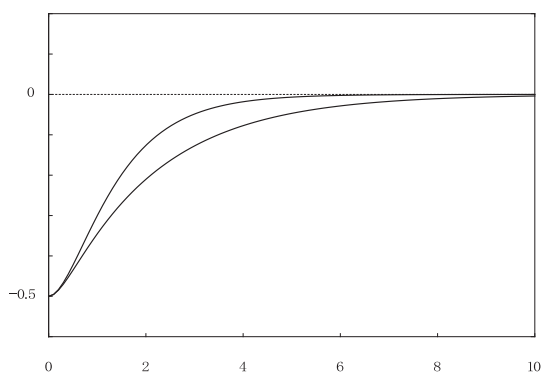


図 19.1: $\gamma = 6, 9$

(Case 2) $\gamma = 4\sqrt{2}$ のとき. (19.2) は重根 $\lambda = -\sqrt{2}$ をもつから, (19.1) の一般解は

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\sqrt{2}t}. \quad (19.4)$$

初期条件から

$$-0.5 = x(0) = C_1, \quad 0 = x'(0) = -\sqrt{2} C_1 + C_2$$

を満たす. これを解いて,

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって,

$$x(t) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}t)e^{-\sqrt{2}t}.$$

念のため, 微分すると

$$x'(t) = te^{-\sqrt{2}t}.$$

よって, $t > 0$ の範囲で $x'(t) > 0$ である.

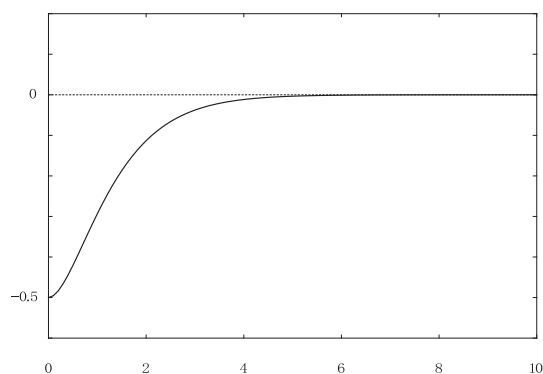


図 19.2: $\gamma = 4\sqrt{2}$

(Case 3) $\gamma < 4\sqrt{2}$ のとき. (19.2) から,

$$\omega = \frac{\sqrt{32 - \gamma^2}}{4} > 0$$

とおくと, 特性方程式の根は,

$$-\frac{\gamma}{4} \pm i\omega$$

となる. よって, (19.1) の一般解は

$$x(t) = e^{-\gamma t/4}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (19.5)$$

となる. 初期条件から

$$-0.5 = x(0) = C_1, \quad 0 = x'(0) = -\frac{\gamma}{4}x(0) + e^{-\gamma t/4}(-C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t)$$

を満たす. よって,

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{-\gamma}{2\sqrt{32 - \gamma^2}}.$$

求めるべき解は

$$x(t) = -e^{-\gamma t/4} \left(\frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{\gamma}{2\sqrt{32 - \gamma^2}} \sin \omega t \right).$$

特に, $\gamma = 4$ としてみると,

$$x(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

などが得られる. 図は $\gamma = 1$ の場合. これを減衰振動という.

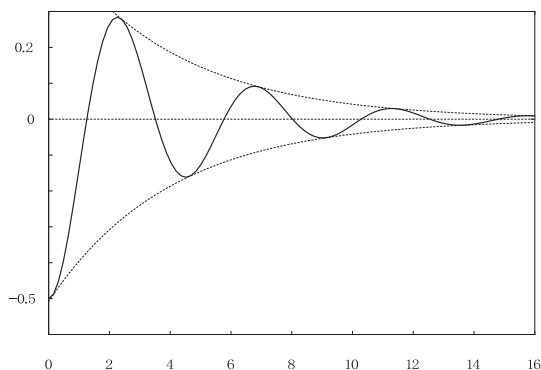


図 19.3: $\gamma = 1$

20 微分方程式

$$y' = \frac{y}{x} + 1 \quad (20.1)$$

の解は x のべき級数として解くことができないことを示せ. 次に, $x - 1$ のべき級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n \quad (20.2)$$

として解け.

解説 まず, x のべき級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (20.3)$$

を仮定して解を求めてみよう. (20.1) でもよいが, 両辺に x をかけた

$$xy' = y + x \quad (20.4)$$

に (20.3) を代入する:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x.$$

整理して

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n = c_0 + (c_1 + 1)x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

両辺の x の係数を比較すると,

$$c_1 = c_1 + 1$$

を得るが, これを満たすことはできない. よって, (20.3) の形の解は存在しない.

次に, (20.2) の形の解を求めてみよう. $(x-1)$ のべき級数の形なので, もとの方程式もそれにあわせて変形しておくとも便利である. (20.4) から,

$$(x-1)y' + y' = y + (x-1) + 1$$

として, (20.2) を代入しよう:

$$(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + (x-1) + 1.$$

整理して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-1)^n = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

係数を比較して,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 1, \\ a_1 + 2a_2 &= a_1 + 1, \\ na_n + (n+1)a_{n+1} &= a_n, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

整理して,

$$a_1 = a_0 + 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1} a_n, \quad n \geq 2.$$

したがって,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{n-2}{n} a_{n-1} = (-1)^2 \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n-2} \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n-1} \dots \frac{1}{3} a_2 \\ &= (-1)^{n-2} \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} a_2 \\ &= \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

こうしてべき級数の係数は次のように決定された. a_0 は任意で,

$$a_1 = a_0 + 1, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}, \quad n \geq 2.$$

よって, 解は,

$$y = a_0 + (a_0 + 1)(x - 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} (x-1)^n. \quad (20.5)$$

(注意) (20.5) の級数は計算できる. 実際, $\log(1+x)$ のテーラー展開

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

を用いれば,

$$y = a_0 x + x \log x$$

となることが容易にわかる.

21 ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は次を満たすことを示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

解説 ロドリグの公式によって

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-k)} &= (2(n-k))(2(n-k)-1)\dots(2(n-k)-n+1)x^{2(n-k)-n} \\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

であり, x^{n-2k} のベキ $n-2k$ が $< n$ であれば, 微分によって 0 になる. よって,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

ここで和は $n-2k \geq 0 \iff k \leq n/2$ の範囲でとるものとする. せっかくなので, ルジャンドル多項式の具体形として書き留めておこう:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (21.1)$$

一方, 二項展開によって,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-2xz+z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n z^n (2x-z)^n$$

さらに

$$z^n (2x-z)^n = z^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2x)^{n-m} (-z)^m = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^m 2^{n-m} x^{n-m} z^{m+n}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^m 2^{n-m} x^{n-m} z^{m+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{-1/2}{n} (-1)^{m+n} \binom{n}{m} 2^{n-m} x^{n-m} z^{m+n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^{m+n} \binom{n}{m} 2^{n-m} x^{n-m} z^{m+n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m+n} (-1)^{2m+n} \binom{m+n}{m} 2^n x^n z^{2m+n} \end{aligned}$$

したがって, z^N の係数は,

$$\begin{aligned} &\sum_{2m+n=N} \binom{-1/2}{m+n} (-1)^{2m+n} \binom{m+n}{m} 2^n x^n \\ &= (-1)^N \sum_{2m+n=N} \binom{-1/2}{m+n} \binom{m+n}{m} 2^n x^n \\ &= (-1)^N \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{-1/2}{N-m} \binom{N-m}{m} 2^{N-2m} x^{N-2m} \end{aligned}$$

ここで $N \rightarrow n, m \rightarrow k$ と書き直せば,

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-1/2}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k}$$

よって,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-1/2}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} x^{n-2k} z^n$$

が成り立つ. あらためて, z^n の係数を計算しよう. まず, 二項係数の部分は,

$$\begin{aligned}
 \binom{-1/2}{n-k} \binom{n-k}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(n-k)+1)}{(n-k)!} \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \\
 &= (-1)^{n-k} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-2k-1}{2}}{k!(n-2k)!} \\
 &= (-1)^{n-k} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-2k-1)}{2^{n-k} k!(n-2k)!} \\
 &= (-1)^{n-k} \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k} (n-k)! 2^{n-k} k!(n-2k)!} \\
 &= (-1)^{n-k} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k} (n-k)! k!(n-2k)!}
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-k} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k} (n-k)! k!(n-2k)!} 2^{n-2k} x^{n-2k} z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n (n-k)! k!(n-2k)!} x^{n-2k} z^n.
 \end{aligned}$$

ここで z^n の係数はルジャンドル多項式 (21.1) に一致する. よって,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

22 最高次の係数が 1 である n 次多項式 $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ($a_k \in \mathbf{R}$) のうちで積分

$$I = \int_{-1}^1 P(x)^2 dx$$

が最小となるものをルジャンドル多項式を用いて求めよ.

解説 ルジャンドル多項式の直交関係を用いる:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ のとき,} \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \text{ のとき.} \end{cases}$$

任意の n 次多項式は n 次までのルジャンドル多項式の線形結合で表示できる. また, ロドリグの公式から,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!} x^n + \dots$$

がわかる. よって, 最高次の係数が 1 である任意の n 次多項式 $P(x)$ は

$$P(x) = \frac{2^n n! n!}{(2n)!} P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x)$$

で表される. この P に対して, 積分 I を考える. 直交関係があるから,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2^n n! n!}{(2n)!} P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x) \right)^2 \\ &= \left(\frac{2^n n! n!}{(2n)!} \right)^2 \frac{2}{2n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \frac{2}{2k+1}. \end{aligned}$$

ここで, $c_0, \dots, c_{n-1}$ を自由に動かすことで, 最高次係数が 1 であるようなすべての n 次多項式が得られるので, I の最小値は, $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ であるときである. つまり, I を最小にする P は

$$P(x) = \frac{2^n n! n!}{(2n)!} P_n(x)$$

であり, I の最小値は,

$$\left(\frac{2^n n! n!}{(2n)!} \right)^2 \frac{2}{2n+1} = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!}$$

である.

関連問題 ルジャンドル多項式の直交関係式を証明せよ.

23 (第 1 種) ベッセル関数は

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+\nu}$$

で定義される. この定義に基づいて, $J_{1/2}(x)$, $J_{-1/2}(x)$ を三角関数で表し, それらのグラフの概形を示せ.

解説 Γ -関数の性質

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\Gamma(\nu + m + 1) &= (\nu + m)\Gamma(\nu + m) = (\nu + m)(\nu + m - 1)\Gamma(\nu + m - 1) \\ &= \dots \\ &= (\nu + m)(\nu + m - 1)\dots(\nu + 1)\nu\Gamma(\nu)\end{aligned}$$

となる. 特に, $\nu = 1/2$ のときは,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

にも注意して,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right) &= \left(\frac{1}{2} + m\right)\left(\frac{1}{2} + m - 1\right)\dots\left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}(2m+1)(2m-1)\dots 3 \cdot 1\sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \frac{(2m+1)!}{(2m)(2m-2)\dots 4 \cdot 2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{2m+1}} \frac{(2m+1)!}{m!} \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

よって, $J_{1/2}$ の定義式において, $x^{2m+1/2}$ の係数は,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1/2 + m + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1/2} &= \frac{(-1)^m}{m!} \times 2^{2m+1} \frac{m!}{(2m+1)!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1/2} \\ &= \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

したがって,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{2m+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

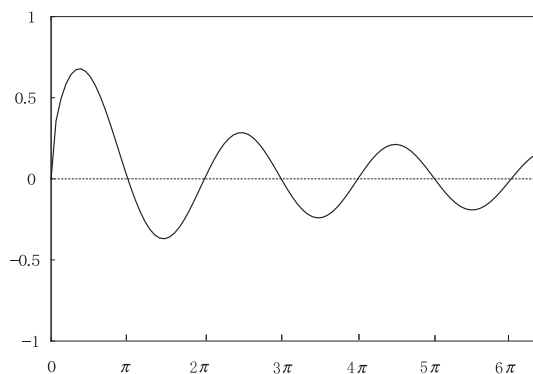
こうして,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

が得られた. グラフにおいては,

$$\lim_{x \rightarrow +0} J_{1/2}(x) = 0$$

に注意する.

図 23.1: $J_{1/2}(x)$

$\nu = -1/2$ の場合も同様の計算を行う.

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(-\frac{1}{2} + m + 1\right) &= \left(-\frac{1}{2} + m\right)\left(-\frac{1}{2} + m - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\
 &= \frac{1}{2^m} (2m-1)(2m-3) \cdots 3 \cdot 1 \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m)(2m-2) \cdots 4 \cdot 2} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{m!} \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

よって, $J_{-1/2}$ の定義式において, $x^{2m-1/2}$ の係数は,

$$\frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-1/2 + m + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1/2} = \frac{(-1)^m}{m!} \times 2^{2m} \frac{m!}{(2m)!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1/2} = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

したがって,

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{2m-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

こうして,

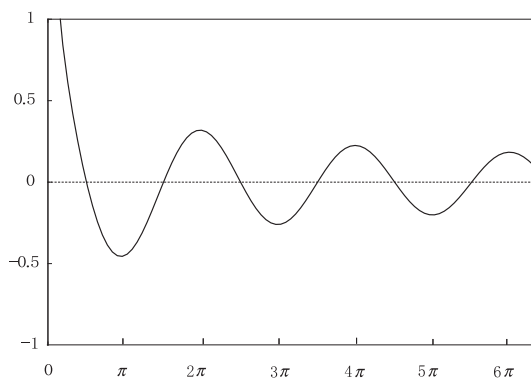
$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

グラフでは,

$$\lim_{x \rightarrow +0} J_{-1/2}(x) = +\infty$$

に注意しよう.

24 次数 $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$ のベッセル関数 $J_\nu(x)$ は $\sin x, \cos x, \sqrt{x}$ の多項式の四則演算で表示できることを示せ. ただし, 教科書にある公式は証明せずに用いてよい.

図 23.2: $J_{-1/2}(x)$

解説 ベッセル関数の公式

$$\{x^\lambda J_\lambda(x)\}' = x^\lambda J_{\lambda-1}(x), \quad (24.1)$$

$$\{x^{-\lambda} J_\lambda(x)\}' = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x) \quad (24.2)$$

に注意する.

$\nu = n + \frac{1}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の場合, $J_\nu(x)$ が $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$ の四則演算で表示できることを n に関する帰納法で示そう. まず, $n = 0$ の場合は $\nu = 1/2$ であるから, 前問によって

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

であるから, 主張は正しい. $n > 1$ として $n-1$ まで主張が正しいと仮定する. (24.2) において, $\lambda = n - 1/2$ とおいて,

$$J_{n+1/2}(x) = -x^{n-1/2} \{x^{-n+1/2} J_{n-1/2}(x)\}' \quad (24.3)$$

帰納法の仮定から, $J_{n-1/2}(x) = J_{n-1+1/2}(x)$ は $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$ の四則演算で表される. よって, (24.3) もそうである.

$\nu = -n + \frac{1}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$) の場合は公式 (24.1) を用いて同様の考えで証明できる.

関連問題 $J_{\pm 3/2}(x)$ の具体的表示を求めよ.

(別解) 公式

$$J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

を用いてもよい. $\lambda = \frac{1}{2} + n$ とおけば,

$$J_{\frac{1}{2}+n+1}(x) = \frac{1+2n}{x} J_{\frac{1}{2}+n}(x) - J_{\frac{1}{2}+n-1}(x)$$

が得られる. $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$ が $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$ の四則演算で表されることを個別に示せば, 帰納的に, $J_{\frac{1}{2}+n+1}(x)$ もそうであることが示される. $\lambda = \frac{1}{2} - n$ も同様である.

25 次の連立微分方程式を解け. ただし, 未知関数は $y = y(x)$, $z = z(x)$ の 2 個である.

$$(1) \begin{cases} 2\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} - 4y - z = e^x \\ \frac{dy}{dx} + 3y - z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2y + z' + 3z = 0 \\ y' + z' + z = 0 \end{cases}$$

解説 (1) 第 2 式から,

$$z = \frac{dy}{dx} + 3y, \quad z' = y'' + 3y'. \quad (25.1)$$

これらを第 1 式に代入して,

$$2y' + (y'' + 3y') - 4y - (y' + 3y) = e^x.$$

整理して

$$y'' + 4y' - 7y = e^x. \quad (25.2)$$

まず, 対応する同次方程式

$$y'' + 4y' - 7y = 0 \quad (25.3)$$

を解く. 特性方程式

$$\lambda^2 + 4\lambda - 7 = 0$$

を解いて,

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{11}.$$

よって, (25.3) の一般解は,

$$y = C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x}.$$

次に (25.2) の特殊解を求めるために, 右辺の形から $y = Ae^x$ と想定して代入してみよう.

$$A(e^x + 4e^x - 7e^x) = e^x.$$

これは, $A = -1/2$ のときに成り立つ. つまり,

$$y = -\frac{1}{2} e^x$$

は (25.2) の特殊解である. よって, (25.2) の一般解は,

$$y = C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x.$$

(25.1) に代入して,

$$\begin{aligned}
 z &= \left(C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x \right)' \\
 &\quad + 3 \left(C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x \right) \\
 &= (-2 + \sqrt{11}) C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + (-2 - \sqrt{11}) C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x \\
 &\quad + 3 \left(C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x \right) \\
 &= (1 + \sqrt{11}) C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + (1 - \sqrt{11}) C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - 2e^x.
 \end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{cases} y = C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - \frac{1}{2} e^x \\ z = (1 + \sqrt{11}) C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + (1 - \sqrt{11}) C_2 e^{(-2-\sqrt{11})x} - 2e^x. \end{cases}$$

(2) 第 1 式から,

$$y = -\frac{1}{2} z' - \frac{3}{2} z \implies y' = -\frac{1}{2} z'' - \frac{3}{2} z'. \quad (25.4)$$

これを第 2 式に代入して,

$$-\frac{1}{2} z'' - \frac{3}{2} z' + z' + z = 0 \implies z'' + z' - 2z = 0.$$

これは特性方程式によって容易に解ける. 特性方程式は,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0.$$

よって, $\lambda = -2, 1$ となり, 求める解は,

$$z = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

(25.4) に代入して,

$$y = -\frac{1}{2} (-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) - \frac{3}{2} (C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) = -\frac{1}{2} C_1 e^{-2x} - 2C_2 e^x.$$

以上まとめると,

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-2x} - 2C_2 e^x \\ z = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x. \end{cases}$$

26 ベクトル形式で書かれた微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

は, 2次元平面 (相空間) に軌道を定める. その様子を次の場合に詳しく調べよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \alpha > 0.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha > 0.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \alpha > 0.$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

解説 一般解は

$$x = e^{tA}x_0$$

で与えられるから,

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

の計算に帰着される.

(1) 対角行列なので簡単であり,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix}$$

がわかる. よって

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)e^{\alpha t} \\ x_2(0)e^{-\alpha t} \end{pmatrix}$$

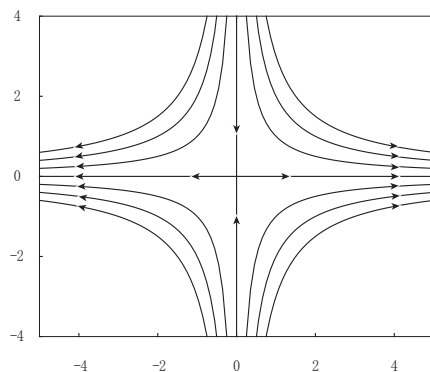
よって, 軌道の方程式は,

$$x_1 x_2 = x_1(0) x_2(0), \quad x_1(0) x_2(0) \neq 0 \text{ のとき.}$$

$x_1(0) = 0, x_2(0) \neq 0$ であれば, 軌道は x_2 -軸になり, $x_1(0) \neq 0, x_2(0) = 0$ であれば, 軌道は x_1 -軸になる. $x_1(0) = x_2(0) = 0$ であれば, 軌道は $(0, 0)$ の 1 点である. 図では時間の流れ $t \rightarrow \infty$ の向きに矢印を記してある.

(2)

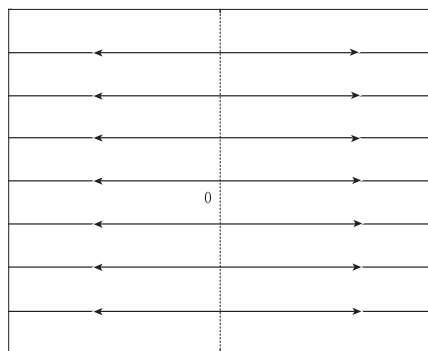
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



となるから,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)e^{\alpha t} \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

よって, $x_2(t) = x_2(0)$ で変化しない定数である. したがって, 軌道は, x_1 -軸に平行な直線.



(3)

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

と分けると便利である. $DN = ND$ であるから,

$$e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & te^{-\alpha t} \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & te^{-\alpha t} \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1(0) + tx_2(0))e^{-\alpha t} \\ x_2(0)e^{-\alpha t} \end{pmatrix}.$$

したがって, 軌跡の方程式 $(x_1(0), x_2(0))$ を任意に選んで,

$$x_1(t) = (x_1(0) + tx_2(0))e^{-\alpha t}, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-\alpha t} \quad (26.1)$$

と表される.

(case 1) $x_2(0) = 0$ のとき. (26.1) から,

$$x_2(t) = 0, \quad x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha t}.$$

したがって, $(x_1(0), 0)$ から x_1 軸に沿って原点に吸引されるような軌道が得られる.

(case 2) $x_2(0) > 0$ のとき. (26.1) から, $x_2(t) > 0$ であることに注意する. (26.1) において t を消去して, 軌跡の方程式を求めよう. 第 2 式から

$$t = -\frac{1}{\alpha} \log \frac{x_2}{x_2(0)}.$$

第 1 式に代入して,

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x_1(0) - \frac{x_2(0)}{\alpha} \log \frac{x_2}{x_2(0)} \right) \frac{x_2}{x_2(0)} \\ &= \frac{x_1(0)}{x_2(0)} x_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log \frac{x_2}{x_2(0)} \\ &= \left(\frac{x_1(0)}{x_2(0)} + \frac{\log x_2(0)}{\alpha} \right) x_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log x_2 \end{aligned}$$

$x_1(0), x_2(0)$ が任意であるから, 軌跡の方程式の一般形は,

$$x_1 = Cx_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log x_2$$

で与えられる. $t \rightarrow \infty$ とともに, $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (0, 0)$ となる.

(case 3) $x_2(0) < 0$ のとき. (26.1) から, $x_2(t) < 0$ であることに注意する. (26.1) において t を消去して, 軌跡の方程式を求める. 計算は (case 2) とほとんど同じであるが, $\log$ の部分だけ注意を要する.

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x_1(0) - \frac{x_2(0)}{\alpha} \log \frac{x_2}{x_2(0)} \right) \frac{x_2}{x_2(0)} \\ &= \frac{x_1(0)}{x_2(0)} x_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log \frac{x_2}{x_2(0)} \\ &= \left(\frac{x_1(0)}{x_2(0)} + \frac{\log(-x_2(0))}{\alpha} \right) x_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log(-x_2) \end{aligned}$$

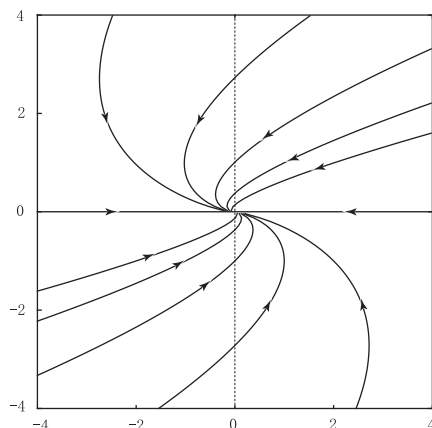
$x_1(0), x_2(0)$ が任意であるから, 軌跡の方程式の一般形は,

$$x_1 = Cx_2 - \frac{x_2}{\alpha} \log(-x_2)$$

で与えられる. $t \rightarrow \infty$ とともに, $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (0, 0)$ となる.

(4) まず, tA を次のように分解する:

$$tA = t \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta t \\ \beta t & 0 \end{pmatrix}.$$

図 26.1: $\alpha = 1, C = 0, \pm 1, \pm 2$

第 1 の行列はスカラー行列であるから, 第 2 の行列と可換である. よって, 指数法則によって,

$$e^{tA} = \exp \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & -\beta t \\ \beta t & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} I$$

は明らか. また,

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\beta t \\ \beta t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

が $\sin, \cos$ のテーラー展開からすぐわかる. よって,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(x_1(0) \cos \beta t - x_2(0) \sin \beta t) \\ e^{\alpha t}(x_1(0) \sin \beta t + x_2(0) \cos \beta t) \end{pmatrix}$$

軌跡は, 左巻きに発散する渦巻きである. $\alpha = 0$ ならば, 円運動であることは見やすいだろう.

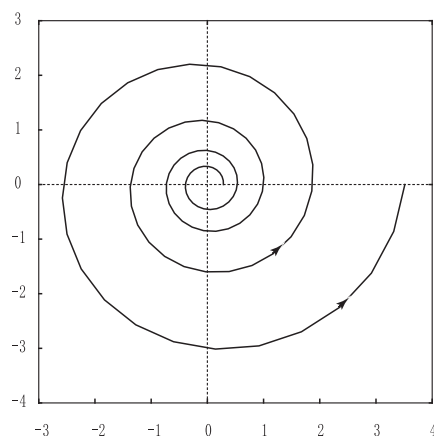
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1(0)^2 + x_2(0)^2)e^{2\alpha t}$$

であることから, 点 $(x(t), y(t))$ の原点からの距離は, 時間とともに $e^{\alpha t}$ の倍率で増えることがわかる.

27 次の連立微分方程式を行列の指数関数を用いて解け.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 4x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 - 4x_3,$$

初期条件: $x_1(0) = 6, x_2(0) = 1, x_3(0) = 2$.

図 26.2: $\alpha = 0.1$

解説 行列表示するために

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

とおけば, 与えられた方程式は

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = X_0 \quad (27.1)$$

となる. よって, 解は

$$X = e^{tA} X_0$$

で与えられる. 問題は, e^{tA} の計算に尽きる.

A の固有値は

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda + 3)^2 = 0$$

を解いて $\lambda = 0, -3$ を得る. ここで $\lambda = -3$ は重根であるから, 重複度 2 の固有値となる. 固有値 -3 に対応する固有ベクトルは, $AY = -3Y \Leftrightarrow (A + 3I)Y = 0$ を解けば得られる. 成分では,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_2 + 4y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \end{cases}$$

となる. これより,

$$y_1 = y_3, \quad y_2 = -2y_3,$$

が得られるから, 固有値 -3 に対する固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の定数倍しかえられない. 固有値の重複度 2 だけの次元の固有空間がないので, A は対角化できないことがわかる.

したがって, A に対しては, Jordan 標準形を用いる. すなわち, 正則行列 T によって

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} T^{-1} \iff AT = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

の形に変形できる. さらに, -3 の固有ベクトルを求めてあるので,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27.3)$$

固有値 0 に対する固有ベクトルも求めておこう. $AY = 0Y \iff AY = 0$ を解けば得られる. 成分では,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ -y_2 + 4y_3 = 0 \\ y_1 - 4y_3 = 0 \end{cases}$$

となる. これより,

$$y_1 = 4y_3, \quad y_2 = 4y_3,$$

が得られるから, 固有値 0 に対する固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られた. よって,

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27.4)$$

(27.2) を満たす T を求めるに当たり, (27.3), (27.4) を考慮すれば,

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & t_{13} \\ 4 & -2 & t_{23} \\ 1 & 1 & t_{33} \end{pmatrix}$$

のような形が仮定できる. そして,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & t_{13} \\ 4 & -2 & t_{23} \\ 1 & 1 & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & t_{13} \\ 4 & -2 & t_{23} \\ 1 & 1 & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

を解けばよい. 未知数の関係する部分だけ見ればよく,

$$\begin{cases} -t_{13} + t_{23} = 1 - 3t_{13} \\ -t_{23} + 4t_{33} = -2 - 3t_{23} \\ t_{13} - 4t_{33} = 1 - 3t_{33} \end{cases}$$

に帰着される. これを解いて,

$$t_{13} = t_{33} + 1, \quad t_{23} = -2t_{33} - 1.$$

よって, 例えば,

$$t_{13} = 1, \quad t_{23} = -1, \quad t_{33} = 0.$$

こうして,

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

がとれて,

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} T^{-1}$$

となる.

次に, e^{tA} を考えよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

とおくと, $DN = ND$ が確かめられるから,

$$e^{tA} = e^{T(tD+tN)T^{-1}} = Te^{(tD+tN)}T^{-1} = Te^{tD}e^{tN}T^{-1}.$$

そこで, e^{tD} と e^{tN} を計算する. D は対角行列なので

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

また, $N^2 = 0$ であるから,

$$e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

こうして,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 8/9 \\ 2/3 & -1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 + 5e^{-3t} + 6te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} - 12te^{-3t} \\ 4 - 4e^{-3t} - 12te^{-3t} & 4 + 5e^{-3t} + 6te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} + 24te^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} + 6te^{-3t} & 1 - e^{-3t} - 3te^{-3t} & 1 + 8e^{-3t} - 12te^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, T^{-1} は掃き出し法などによって求めた. したがって, (27.1) の解は,

$$\begin{aligned} X &= e^{tA} X_0 \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 + 5e^{-3t} + 6te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} - 12te^{-3t} \\ 4 - 4e^{-3t} - 12te^{-3t} & 4 + 5e^{-3t} + 6te^{-3t} & 4 - 4e^{-3t} + 24te^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} + 6te^{-3t} & 1 - e^{-3t} - 3te^{-3t} & 1 + 8e^{-3t} - 12te^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 + 2e^{-3t} + te^{-3t} \\ 4 - 3e^{-3t} - 2te^{-3t} \\ 1 + e^{-3t} + te^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(参考) Jordan 標準形については, やや進んだ線形代数の教科書で述べられているだろう. 例えば,

吉野崇・田中一之: 基礎課程 線形代数学, 培風館.

内田伏一・浦川肇: 線形代数概説, 裳華房.

齋藤正彦: 線型代数入門, 東京大学出版会.

佐竹一郎: 線型代数学, 裳華房.

ごく簡単な注意と微分方程式との関係は

小寺平治: テキスト線形代数, 共立.

などにもある.

28 次の微分方程式について問に答えよ.

$$xy' + y = x\sqrt{y} \quad (28.1)$$

- (1) $u = \sqrt{y}$ とおいて u に関する微分方程式を導け.
 (2) (1) で得た微分方程式の一般解 $u = u(x)$ を求めよ.
 (3) (28.1) の一般解のグラフ $y = y(x)$ が上半平面 ($y \geq 0$) を埋め尽くす様子を図示せよ.

解説 (1) $u = \sqrt{y}$ から, $u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$. (28.1) を

$$x \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{x}{2}$$

と変形して, y を消去すれば,

$$xu' + \frac{u}{2} = \frac{x}{2}. \quad (28.2)$$

(2) (28.2) で得られた微分方程式を解こう. まず, 同次形

$$xu' + \frac{u}{2} = 0$$

を解く. これは,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2x}$$

と変形されるから, 変数分離型である. 積分して,

$$\log |u| = -\frac{1}{2} \log |x| + c \implies u = C|x|^{-1/2} \quad (28.3)$$

が得られる. (28.2) は定数変化法で解くことができる. 解を $u = C(x)|x|^{-1/2}$ と想定して求めよう. まず, $x > 0$ のとき,

$$u' = C'(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}C(x)x^{-3/2}$$

であるから, (28.2) に代入して,

$$C'(x)x^{1/2} - \frac{1}{2}C(x)x^{-1/2} + \frac{1}{2}C(x)x^{-1/2} = \frac{x}{2} \implies C'(x) = \frac{x^{1/2}}{2}$$

積分して,

$$C(x) = \frac{x^{3/2}}{3} + C.$$

よって, (28.2) の解は, $x > 0$ の範囲では,

$$u = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + C \right) x^{-1/2} = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

$x < 0$ の範囲でも同様の計算が通用し, $x > 0, x < 0$ まとめて,

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x|}}.$$

が得られる. よって,

(別解) なお, (28.2) の特殊解を 1 つ求めて, 同次型の一般解 (28.3) と和を考えてもよい. 特殊解は, 右辺の形から, $u = ax + b$ と想定しても求めることができる. (28.2) に代入して,

$$xa + \frac{1}{2}(ax + b) = \frac{x}{2}$$

よって, $a = \frac{1}{3}, b = 0$. これより, 特殊解は $u = \frac{x}{3}$. よって, (28.2) の一般解は, (28.3) との和として

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x|}}.$$

(3) (2) の結果から, $u \geq 0$ の範囲で

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x|}} \right)^2$$

が (28.1) の一般解を与える. 場合わけをして考えてゆこう.

(case 1) $x > 0$ のとき.

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

であるから, $C \geq 0$ ならすべての $x > 0$ に対して $u \geq 0$. よって,

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right)^2, \quad x > 0, \quad C \geq 0,$$

はすべて解曲線である. $C < 0$ ならば,

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}} \geq 0 \implies x \geq (-3C)^{2/3}$$

よって,

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right)^2, \quad x \geq (-3C)^{2/3}, \quad C < 0,$$

が解曲線である.

(case 2) $x < 0$ のとき.

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{-x}}$$

である. $C \geq 0$ なら,

$$u = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{-x}} \geq 0 \implies -(3C)^{2/3} \leq x < 0.$$

よって,

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{-x}} \right)^2, \quad -(3C)^{2/3} \leq x < 0, \quad C \geq 0,$$

が解曲線である. $C < 0$ なら $x < 0$ において $u > 0$ となることはない.

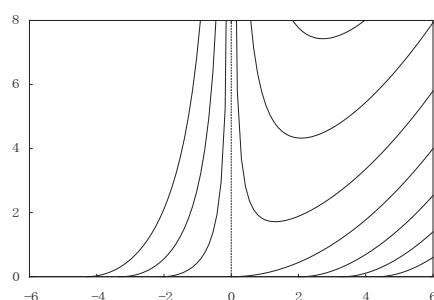


図 28.1: $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

29 微分方程式のベキ級数による解法を, 実例によって説明せよ.

解説 略

30 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' - 3y' + 2y = 4x - 20 \cos 2x - 4 \quad (30.1)$$

解説 まず, 同次型

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (30.2)$$

を解く. 特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

から, 特性根 $\lambda = 1, 2$ を得る. よって, (30.2) の一般解は,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad (30.3)$$

次に, (30.1) の特殊解を求める. 右辺の形から,

$$y'' - 3y' + 2y = 4x - 4 \quad (30.4)$$

に対して $y = ax + b$,

$$y'' - 3y' + 2y = -20 \cos 2x \quad (30.5)$$

に対して $y = a \sin 2x + b \cos 2x$ と分けて想定しよう. (もちろん, まとめてもよい. そのときは未定係数は 4 個必要.) まず, (30.4) については,

$$-3a + 2(ax + b) = 4x - 4$$

より, $a = 2, b = 1$. よって, (30.4) の特殊解は

$$y = 2x + 1. \quad (30.6)$$

(30.5) については,

$$(-4a \sin 2x - 4b \cos 2x) - 3(2a \cos 2x - 2b \sin 2x) + 2(a \sin 2x + b \cos 2x) = -20 \cos 2x$$

から $a = 3, b = 1$. よって (30.5) の特殊解は,

$$y = 3 \sin 2x + \cos 2x. \quad (30.7)$$

こうして, 求めるべき解は, (30.3), (30.6), (30.7) の和として,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 1 + 3 \sin 2x + \cos 2x.$$

31 次の連立微分方程式について問に答えよ. ただし, $\alpha > 0$ は正の定数である.

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (S)$$

(1) 行列の指数関数 e^{tA} を計算せよ. ただし, $t \in \mathbf{R}$ は実数である.

(2) 連立微分方程式 (S) を解き, t が変化してできる曲線 $(x(t), y(t))$ の概略を示せ.

解説 (1) A を 2 つの行列の和に分けると便利である.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha I + N.$$

スカラー行列 αI と N は可換であるから,

$$e^{tA} = e^{\alpha t I + tN} = e^{\alpha t I} e^{tN}.$$

対角行列については, べき乗は対角成分のみ考えれば十分であり,

$$e^{\alpha t I} = e^{\alpha t} I.$$

また, $N^2 = 0$ に注意して,

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

(2) (S) の一般解は,

$$X(t) = e^{tA} X_0, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 成分では,

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + y_0 t e^{\alpha t}, \quad y(t) = y_0 e^{\alpha t}. \quad (31.1)$$

いくつかの典型的な (x_0, y_0) に対して, 軌道 ($t \in \mathbf{R}$ を走らせてできる曲線 $(x(t), y(t))$) について述べよう.

(case 1) $x_0 = y_0 = 0$. このとき, t によらず一点にとどまる.

(case 2) $x_0 \neq 0, y_0 = 0$.

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}, \quad y(t) = 0.$$

よって, 点 $(x(t), y(t))$ は $t \rightarrow \infty$ とともに, x 軸上を原点から離れる方向に移動する.

(case 3) $y_0 \neq 0$. (31.1) の第 2 式から

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{\alpha t}, \quad t = \frac{1}{\alpha} \log \frac{y(t)}{y_0}.$$

ここで, $y(t)/y_0 = e^{\alpha t} > 0$ に注意すると, $y(t)$ と y_0 は同符号であることがわかる. よって,

$$\left| \frac{y(t)}{y_0} \right| = e^{\alpha t}, \quad t = \frac{1}{\alpha} \log \left| \frac{y(t)}{y_0} \right|.$$

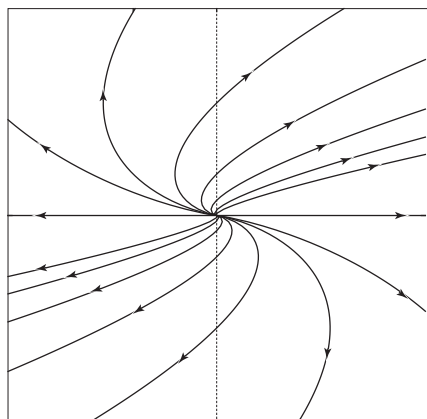
これを第 1 式に代入して,

$$x(t) = x_0 \left| \frac{y(t)}{y_0} \right| + \frac{y(t)}{\alpha} \log \left| \frac{y(t)}{y_0} \right| = \left(\pm \frac{x_0}{|y_0|} - \frac{\log |y_0|}{\alpha} \right) y(t) + \frac{y(t)}{\alpha} \log |y(t)|.$$

$\pm$ は $y(t) > 0$ の範囲では $+$, $y(t) < 0$ の範囲では, $-$ をとる. こうして, 軌跡の一般形は,

$$\alpha x = C y + y \log |y|, \quad C \text{ は任意定数}$$

で与えられ, $(x(t), y(t))$ は, $t \rightarrow \infty$ とともに, 原点から遠ざかる方向に移動することがわかる.



32 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 4y = \cos 2x \quad (32.1)$$

解説 特殊解を求めるために, 右辺の形から

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

と想定するのが第一歩であるが, この形では求まらない. そこで,

$$y = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x$$

と想定してみよう.

$$y' = A \cos 2x - 2Ax \sin 2x + B \sin 2x + 2Bx \cos 2x$$

$$y'' = -4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x + 4B \cos 2x - 4Bx \sin 2x$$

を代入して,

$$y'' + 4y = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x.$$

これが $\cos 2x$ に一致するのは, $A = 0, B = \frac{1}{4}$ のときである. よって, (32.1) の特殊解

$$y = \frac{x}{4} \sin 2x$$

が求まった. $y'' + 4y = 0$ の一般解は, $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ であるから, (32.1) の一般解は,

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x$$

となる.