

2004 年度 数学概論 B 練習問題

(C12101 月曜 2 講時, 尾畑)

- 忘れないように練習しましょう.
- 答や雑多な情報を「全学教育科目講義ニュース」としてホームページに掲載します.

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/>

1. 行列の基本変形を述べなさい.

2. 次の行列のうち階段行列はどれですか?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列に (行の) 基本変形を施して, 簡約階段行列に変形しなさい. 階数も求めよう.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

解答 (2004.4.26 配布)

3. 次の行列に (行の) 基本変形を施して, 簡約階段行列に変形しなさい. 階数も求めよう.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8/13 \\ 0 & 1 & 11/13 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -7/12 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 2$$

2004 年度 数学概論 B 練習問題

(C12101 月曜 2 講時, 尾畑)

● 忘れないように練習しておきましょう.

1. 行列の基本変形を利用して次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. 余因子展開を利用して次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列式が 0 になるような x を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

重要な連絡

期末試験 7月26日(月) 10:30–12:00 B202 教室 (いつもと違うので注意).

欠席届 行事などで期末試験が受けられない人は欠席届を 7月12日(月)の講義時までに提出すること.

欠席届を出した人のための追試験 7月30日(金). 青葉山の情報科学研究科7階711セミナー室に14:30集合のこと(地図は大学のウェブページなどを参照).

再試験 試験は1回限りである. 再試験等はいっさい行わない. ただし, 病欠の場合は正規の手続き(教務係)を経て考慮される.

雑多な連絡 「学教育科目講義ニュース」としてホームページに掲載しているので随時見られたい.

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/>

解答 (2004.7.5 配布)

1. (1)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \text{(第2行) - (第1行), (第3行) - (第1行)} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && \text{(第3行) - (第2行)} \\
 &= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && \text{三角行列の行列式は簡単} \\
 &= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{(第2} \sim \text{4行) - (第1行)} \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && \text{(第1列) + (第2列) + (第3列) + (第4列)} \\
 &= -3 && \text{三角行列の行列式は簡単}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{(第3行) + (第2行)} \\ \text{(第4行) + (第2行) } \times 2 \end{array} \\ &= (-3) \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 & 12 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{(第1行) - (第4行) } \times 2 \\ \text{(第2行) + (第4行) } \times 2 \\ \text{(第3行) + (第4行) } \times 5 \end{array} \\ &= (-3)(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-1)(+1)(48 - 98) = -150 \end{aligned}$$

2. (1) 第2行に関する余因子展開.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1)(-5) + (-3)(-1)(3) = 4 \end{aligned}$$

(2) 第3列に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

ここで 3×3 行列式は別に計算しよう.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1)(-3) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -40 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} \\
= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -40 \end{vmatrix} = (-1)(40) = -40.$$

よって,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(+1) \times 12 + (-3)(-1) \times (-40) = -132.$$

3. (1)

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} = (3-x)(4-x) - 2 = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

であるから, 求める x は $x = 2, 5$.

(2)

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2-x & -x & 1 \\ 2-x & 1 & -x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(第1列)} + \text{(第2列)} \\ \text{(第1列)} + \text{(第3列)} \end{array} \\
= (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
= (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ 0 & 0 & -x-1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(第2行)} - \text{(第1行)} \\ \text{(第3行)} - \text{(第1行)} \end{array} \\
= (2-x)(-x-1)^2 = (2-x)(x+1)^2$$

よって求める x は $x = -1, 2$.

★ 行列式の計算方法は一通りではない. さまざまなやり方を試して, 答えが一致することを確かめよ.