2004年度 数学概論 B (C12101) 期末試験問題

実施: 2004. 7.26 (月) 10:30–12:00

- 解答は整然と文章によって記せ. 読めない解答は採点から除外する.
- 合格基準点 = 60 点

1. 次の行列 A, B, C に対して AB, BA, $A+2C$, C^2 を計算せよ. (5 点 × 4 = 20 点)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の階数を求めよ. (15 点)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 連立方程式 $\begin{cases} 2x + y + 9z - 8w = 2 \\ -3x + 2y - 13z - 10w = 6 \\ -x + 3y - 8z + 18w = 20 \end{cases}$ について次の問に答えよ.

(1) 与えられた方程式を行列を用いて表示せよ. (5 点)

(2) 掃き出し法 (拡大係数行列の基本変形) を用いて解け. (15 点)

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．ただし, a は定数である．

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ．(5 点)

(2) A が正則になるための a の条件を求めよ．(5 点)

(3) A の逆行列を求めよ．(15 点)

5. 次の行列式を計算せよ．(2) の答は因数分解の形で求めよ．(10 点 × 2 = 20 点)

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

2004 年度 数学概論 B (C12101) 期末試験解説

1.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 19 \\ 1 & 5 & 41 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 34 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$A + 2C$ はサイズが異なる行列の足し算なので定義できない

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

基本変形によって階段行列にもちこむ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{第 2 行から第 1 行} \times 2 \text{ を引く} \\ \text{第 3 行から第 1 行} \times 3 \text{ を引く} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{第 1 行に第 2 行を加える.} \\ \text{第 3 行から第 2 行} \times 2 \text{ を引く} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{よって階数は 2.}$$

3.

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -8 \\ -3 & 2 & -13 & -10 \\ -1 & 3 & -8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(2) 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ -3 & 2 & -13 & -10 & 6 \\ -1 & 3 & -8 & 18 & 20 \end{pmatrix}$ である. これに基本変形を施し, 階段行列

に変形してゆく.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -8 & 2 \\ -3 & 2 & -13 & -10 & 6 \\ -1 & 3 & -8 & 18 & 20 \end{pmatrix} \qquad \text{第 1 行と第 3 行を入れ替える}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 18 & 20 \\ -3 & 2 & -13 & -10 & 6 \\ 2 & 1 & 9 & -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍する}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & -18 & -20 \\ -3 & 2 & -13 & -10 & 6 \\ 2 & 1 & 9 & -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 2 行に第 1 行 } \times 3 \text{ を加える.} \\ \text{第 3 行から第 1 行 } \times 2 \text{ を引く} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & -18 & -20 \\ 0 & -7 & 11 & -64 & -54 \\ 0 & 7 & -7 & 28 & 42 \end{pmatrix} \qquad \text{第 3 行を } 1/7 \text{ 倍して, 第 2 行と第 3 行を入れ替える}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & -18 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & 11 & -64 & -54 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 1 行に第 2 行 } \times 3 \text{ を加える.} \\ \text{第 3 行に第 2 行 } \times 7 \text{ を加える} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -36 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{第 3 行を } 1/4 \text{ 倍する}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{第 1 行から第 3 行 } \times 5 \text{ を引く.} \\ \text{第 2 行に第 3 行を加える} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 39 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

したがって, 与えられた方程式は,

$$\begin{cases} x + 39w = 13 \\ y - 5w = 3 \\ z - 9w = -3 \end{cases}$$

と同値になる. w を任意の定数として,

$$x = -39w + 13, \qquad y = 5w + 3, \qquad z = 9w - 3.$$

4. (1) サラスの方法などで求めればよい.

$$|A| = a^2 - 2a.$$

(2) A が正則になるための条件は $|A| \neq 0$. よって, $a \neq 0, 2$.

(3) 余因子行列を求めよう.

$$\hat{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \qquad \hat{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a,$$

などを丹念に求めて,

$$
{}^t\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{31} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{32} \\ \hat{a}_{13} & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}
$$

よって,

$$
A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t\hat{A} = \frac{1}{a^2-2a}\begin{pmatrix} a-1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}
$$

(別解) 基本変形によって求めてもよい.

$$
\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

第 2 行を (-1) 倍する
第 1 行と第 2 行を入れ替える

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

第 2 行から第 1 行 $\times a$ を引く

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -a & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

第 3 行を (-1) 倍する
第 2 行と第 2 行を入れ替える

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & -a & 1 & a & 0 \end{pmatrix}
$$

第 1 行に第 2 行を加える.
第 3 行から第 2 行 $\times(a-1)$ を引く

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a(a-1)-a & 1 & a & a-1 \end{pmatrix}
$$

第 3 行を a^2-2a で割る

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a^2-2a) & a/(a^2-2a) & (a-1)/(a^2-2a) \end{pmatrix}
$$

第 1 行から第 3 行 $\times(1-a)$ を引く.
第 2 行に第 3 行 $\times a$ を加える

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(1-a)/(a^2-2a) & -1-(1-a)a/(a^2-2a) & -1-(1-a)(a-1)/(a^2-2a) \\ 0 & 1 & 0 & a/(a^2-2a) & a^2/(a^2-2a) & -1+a(a-1)/(a^2-2a) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a^2-2a) & a/(a^2-2a) & (a-1)/(a^2-2a) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (a-1)/(a^2-2a) & 1/(a-2) & 1/(a^2-2a) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(a-2) & a/(a-2) & -1+1/(a-2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a^2-2a) & 1/(a-2) & (a-1)/(a^2-2a) \end{pmatrix}
$$

したがって,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (a-1)/(a^2-2a) & 1/(a-2) & 1/(a^2-2a) \\ 1/(a-2) & a/(a-2) & 1/(a-2) \\ 1/(a^2-2a) & 1/(a-2) & (a-1)/(a^2-2a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2-2a} \begin{pmatrix} a-1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

5. (1) 成分に 0 が多くなるように基本変形を施し, 余因子展開してサイズを小さくしてゆく.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{第 4 行から第 3 行を引く}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{第 1 列に関して余因子展開する}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{再び, 第 1 列に関して余因子展開する}$$

$$= (-1)2(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

第 2 行から第 1 行 $\times 3$ を引き, 第 3 行から第 1 行 $\times 3$ を加える.

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} \qquad \text{第 1 列に関して余因子展開する}$$

$$= 2 \times 1 \times \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 2(-18-(-8)) = -20.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{第 2 列から第 1 列を引く} \\ \text{第 3 列から第 1 列を引く} \\ \text{第 4 列から第 1 列を引く} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x & c-x \\ x^2 & a^2-x^2 & b^2-x^2 & c^2-x^2 \\ x^3 & a^3-x^3 & b^3-x^3 & c^3-x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x & c-x \\ x^2 & (a-x)(a+x) & (b-x)(b+x) & (c-x)(c+x) \\ x^3 & (a-x)(a^2+ax+x^2) & (b-x)(b^2+bx+x^2) & (c-x)(c^2+cx+x^2) \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & a+x & b+x & c+x \\ x^3 & a^2+ax+x^2 & b^2+bx+x^2 & c^2+cx+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+x & b+x & c+x \\ a^2+ax+x^2 & b^2+bx+x^2 & c^2+cx+x^2 \end{vmatrix}$$

残された行列式を計算しよう.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+x & b+x & c+x \\ a^2+ax+x^2 & b^2+bx+x^2 & c^2+cx+x^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{第 2 列から第 1 列を引く} \\ \text{第 3 列から第 1 列を引く} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & b-a & c-a \\ a^2+ax+x^2 & b^2-a^2+bx-ax & c^2-a^2+cx-ax \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & b-a & c-a \\ a^2+ax+x^2 & (b-a)(b+a+x) & (c-a)(c+a+x) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & 1 & 1 \\ a^2+ax+x^2 & b+a+x & c+a+x \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a+x & c+a+x \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

よって, 求める行列式は,

$$(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b).$$

順序良く書けば, たとえば,

$$(a-x)(b-x)(c-x)(a-b)(b-c)(c-a).$$