

2004 年度 解析学 C (C31308) 期末試験問題

実施: 2004. 7.21 (水) 08:50–10:20

- 第 1 問は必答, 第 2 問から第 4 問のうちから 1 問だけを選択解答せよ. (Answer the question No.1. Select one from among the questions No. 2 – No.4 for answer.)
- 解答は整然と文章によって記せ. 式だけ・答だけは採点対象外とする. (Make up logical and clear sentences. Answers by only equations and symbols are exempt from marking.)
- 読めない解答は採点から除外する. (Illegible answers are immediately exempt from marking.)

1. [必答] 次の問に答えよ. (Answer the following questions.) [15 点 $\times$ 5 = 75 点]

(1) 曲線群 $y = Ce^{x^2}$ を図示し, そらが満たす微分方程式を求めよ. (Draw the family of curves $y = Ce^{x^2}$ and find a differential equation satisfied by them.)

(2) $yy' = 2\sin^2 x$ の一般解を求めよ. (Find a general solution to $yy' = 2\sin^2 x$.)

(3) $(xy' - y)\cos\frac{2y}{x} = -3x^4$ の一般解を求めよ. (Find a general solution to $(xy' - y)\cos\frac{2y}{x} = -3x^4$.)

(4) $\{e^{3x}, e^{-2x}\}$ を基本解とする微分方程式を求めよ. (Find a differential equation whose fundamental solution is given by $\{e^{3x}, e^{-2x}\}$.)

(5) $y'' + 2y' + y = x^2 + 2\cos x$ の一般解を求めよ. (Find a general solution to $y'' + 2y' + y = x^2 + 2\cos x$.)

2. [選択] $a > 0, b > 0$ を正の定数, v を実定数とする. 初期値問題

$$y'' = -y - 2ay', \quad y(0) = b, \quad y'(0) = v$$

の解 $y(t)$ が, $t \geq 0$ の範囲で $y(t) = 0$ とならないように a, b, v を定めよ. [25 点]

3. [選択] ベキ級数法によって次の微分方程式の基本解を求めよ. 解はできるだけ整理した形で記せ. (Find a fundamental solution to the following differential equation by using the method of power series. The solution should be in the most concise possible form.) [25 点]

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \mu^2 y = 0 \quad \mu > 0 \text{ は非整数の定数 (non-integer constant)}$$

4. [選択] 次の曲線群の直交曲線群を求め, その様子を図示せよ. (Find the orthogonal trajectories to the following family of curves and draw the curves.) [25 点]

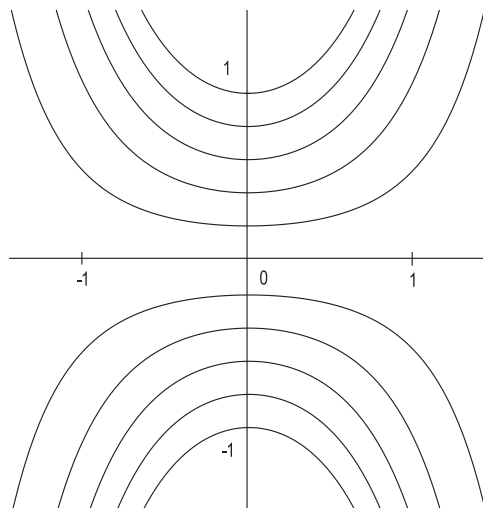
$$x^2 - 2xy - y^2 = C$$

2004 年度 解析学 C (C31308) 期末試験解説

1. (1) $y = Ce^{x^2}$ の両辺を微分し,

$$y' = C \times 2xe^{x^2} = 2xy.$$

よって, 求める微分方程式は $y' = 2xy$.



(2) $ydy = 2\sin^2 x dx$ から変数分離形である. 両辺 2 倍して積分しよう.

$$\int 2ydy = 4 \int \sin^2 x dx \implies y^2 = 2 \int (1 - \cos 2x) dx = 2x - \sin 2x + C.$$

よって, $y^2 = 2x - \sin 2x + C$.

(3) $z = \frac{y}{x}$ とおくと, $y = xz$. よって, $y' = z + xz'$. 与えられた方程式で y を消去しよう.

$$\{x(z + xz') - xz\} \cos 2z = -3x^4.$$

整理して,

$$z' \cos 2z = -3x^2 \implies \cos 2z dz = -3x^2 dx$$

両辺を積分して,

$$\int \cos 2z dz = -3 \int x^2 dx \implies \frac{\sin 2z}{2} = -x^3 + C.$$

したがって, 求める解は, $2C$ をあらためて C として,

$$\sin \frac{2y}{x} = -2x^3 + C.$$

(4) 定係数 2 階微分方程式 $y'' + py' + qy = 0$ の特性方程式を $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. その解が, $3, -2$ であるから, $p = -(3 + (-2)) = -1$, $q = 3(-2) = -6$. 求める方程式は,

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

(5) まず, $y'' + 2y' + y = 0$ の一般解を求める. 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ で重根 -1 をもつ. よって, 基本解は $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$.

では, $y'' + 2y' + y = x^2$ の特殊解を求めよう. $y = x^2 + ax + b$ と想定しよう.

$$y' = 2x + a, \quad y'' = 2$$

から,

$$2 + 2(2x + a) + (x^2 + ax + b) = x^2.$$

整理して,

$$x^2 + (a + 4)x + (2 + 2a + b) = x^2 \implies a = -4, b = 6.$$

よって, 特殊解 $y = x^2 - 4x + 6$ を得た.

次に, $y'' + 2y' + y = 2\cos x$ の特殊解を求めよう. 目測で $y = \sin x$ を得る.

以上から, 求める一般解は

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 - 4x + 6 + \sin x.$$

2. 定係数の2階方程式 $y'' + 2ay' + y = 0$ の解は特性方程式によって求められる. 特性方程式は

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0.$$

解は,

$$\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

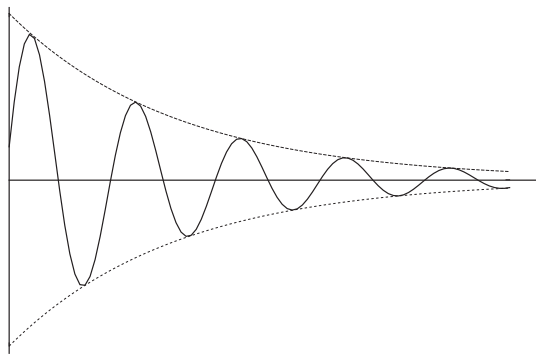
(Case 1) $0 < a < 1$ のとき. 特性根を

$$-a \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{1 - a^2}$$

とおくと, 一般解は $y(t) = e^{-at}(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$. あるいは, 三角関数の合成によって,

$$y(t) = C e^{-at} \sin(\omega t + \theta), \quad C, \theta: \text{定数},$$

と表したほうが見やすいかもしれない. $y(0) = b > 0$ から $C \neq 0$ に注意する. そうすれば, どのような初期条件であっても, $\omega t + \theta = 2\pi k$ をみたす周期的な t において $y(t) = 0$ となり, 題意にあわない. 実際, 解は減衰振動する.



(Case 2) $a = 1$ のとき. 特性根は重根 -1 である. よって, 一般解は

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

である. 初期条件から,

$$y(0) = C_1 = b, \quad y'(0) = -C_1 + C_2 = v.$$

よって, 初期値問題の解は,

$$y = b e^{-t} + (b + v) t e^{-t} = e^{-t} (b + (b + v)t).$$

$e^{-t} > 0$ であるから, $y(t) = 0$ となるのは, $b + (b + v)t = 0$ のときだけである.

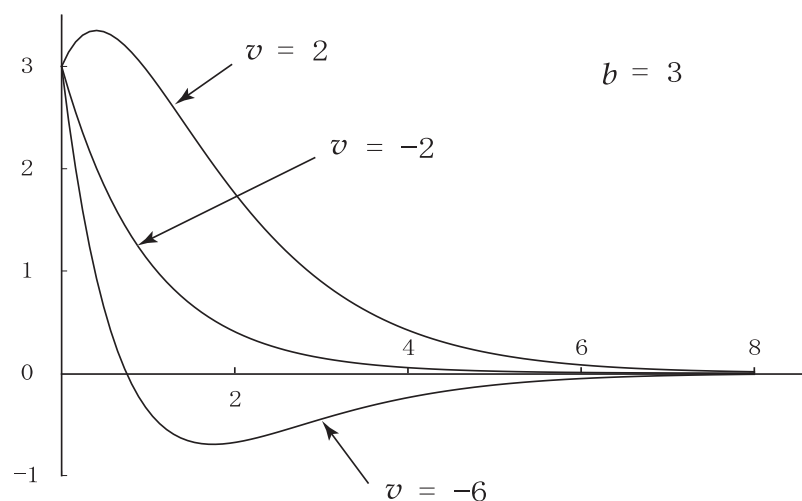
(i) $b + v = 0$ ならば, そのような t はない.

(ii) $b + v \neq 0$ なら $t = -\frac{b}{b+v}$ のときに限り, $y(t) = 0$ となる. そのような t の符号によって2通りの場合がある:

(iia) $-\frac{b}{b+v} < 0$ なら, 任意の $t \geq 0$ で $y(t) \neq 0$.

(iib) $-\frac{b}{b+v} \geq 0$ その点で $y = 0$ となり, 題意を満たさない.

(iia) の条件は, はじめの仮定 $b > 0$ に注意すれば, $b + v > 0$ と同値である. (i) とあわせて, $y(t)$ が $t \geq 0$ の範囲で常に $y(t) \neq 0$ となるための条件は $b + v \geq 0$ となる.



(Case 3) $a > 1$ のとき. 特性根を

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad \beta = -a - \sqrt{a^2 - 1},$$

とおこう. 一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

で与えられる。初期条件から

$$y(0) = C_1 + C_2 = b, \quad y'(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 = v.$$

よって,

$$C_1 = \frac{-\beta b + v}{\alpha - \beta}, \quad C_2 = \frac{\alpha b - v}{\alpha - \beta}.$$

初期値問題の解は,

$$y(t) = \frac{-\beta b + v}{\alpha - \beta} e^{\alpha t} + \frac{\alpha b - v}{\alpha - \beta} e^{\beta t}$$

となる。この式から $y(t) = 0$ となる t を求めてゆこう。 $y(t) = 0$ は,

$$(-\beta b + v) + (\alpha b - v)e^{-(\alpha - \beta)t} = 0 \iff \frac{\alpha b - v}{\beta b - v} = e^{(\alpha - \beta)t} \quad (*)$$

と同値である。

(i) $\frac{\alpha b - v}{\beta b - v} \leq 0$ であれば, (*) をみたす t は存在しない。

(ii) $\frac{\alpha b - v}{\beta b - v} > 0$ であれば, (*) をみたす $t = t_0$ が唯一つ存在する:

$$t_0 = \frac{1}{\alpha - \beta} \log \frac{\alpha b - v}{\beta b - v}.$$

この $t_0 < 0$ なら, すべての $t \geq 0$ に対して $y(t) \neq 0$. また, $t_0 \geq 0$ なら $y(t_0) = 0$ ゆえ題意を満たさない。 $t_0 < 0$ を変形すると, $\alpha - \beta > 0$ に注意して,

$$t_0 < 0 \iff \log \frac{\alpha b - v}{\beta b - v} < 0 \iff \frac{\alpha b - v}{\beta b - v} < 1.$$

(i) とあわせて, $t \geq 0$ で常に $y(t) \neq 0$ となるための条件は,

$$\frac{\alpha b - v}{\beta b - v} < 1.$$

(Case 1)–(Case 3) をまとめると, 次の2つの場合である。

(i) $a = 1, b + v \geq 0$

(ii) $a > 1, \frac{\alpha b - v}{\beta b - v} < 1$, ただし, $\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$.

3. 解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と想定する。まず,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n.$$

よって

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^2 c_n x^n.$$

係数を比較して,

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - c_n n + \mu^2 c_n = 0.$$

つまり,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n^2 - \mu^2)c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

割り算して, 番号を付け替えれば,

$$c_n = \frac{(n-2+\mu)(n-2-\mu)}{n(n-1)} c_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

よって, c_0 が与えられれば c_{2n} が, c_1 が与えられれば c_{2n+1} が定まる. まず,

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{(2n-2+\mu)(2n-2-\mu)}{(2n)(2n-1)} c_{2n-2} \\ &= \frac{(2n-2+\mu)(2n-2-\mu)}{(2n)(2n-1)} \cdot \frac{(2n-4+\mu)(2n-4-\mu)}{(2n-2)(2n-3)} c_{2n-4} \\ &= \dots \\ &= \frac{(2n-2+\mu)(2n-4+\mu) \dots (0+\mu)(2n-2-\mu)(2n-4-\mu) \dots (0-\mu)}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots 2 \cdot 1} c_0. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} &(2n-2+\mu)(2n-4+\mu) \dots (0+\mu) \\ &= 2^n \left(n-1+\frac{\mu}{2}\right) \left(n-2+\frac{\mu}{2}\right) \dots \left(0+\frac{\mu}{2}\right) = 2^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}. \end{aligned}$$

同様に,

$$(2n-2-\mu)(2n-4-\mu) \dots (0-\mu) = 2^n \frac{\Gamma\left(n-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)}.$$

ここで, $\mu > 0$ は整数ではないので, 分母のガンマ関数もすべて有限値をとっている. こうして,

$$c_{2n} = 2^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \times 2^n \frac{\Gamma\left(n-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)} \frac{1}{(2n)!} c_0 = \frac{2^{2n} \Gamma\left(n+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{\mu}{2}\right)}{(2n)! \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)} c_0.$$

同様の計算によって,

$$c_{2n+1} = \frac{2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1-\mu}{2}\right)}{(2n+1)! \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)} c_1.$$

これらにおいて, 分母のガンマ関数は n によらない定数なので, それぞれ, c_0, c_1 に含めてしまつてよい. こうして, 2つの解

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{\mu}{2}\right)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1-\mu}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

が得られた. y_0 は偶関数, y_1 は奇関数なのでそれらは一次独立であり, $\{y_0, y_1\}$ は基本解となる.

4. $x^2 - 2xy - y^2 = C$ を微分して,

$$2x - 2y - 2xy' - 2yy' = 0.$$

よって,

$$y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

つまり, 与えられた曲線群のうち, (x, y) を通る曲線のその点における接線の傾きが $\frac{x-y}{x+y}$.

求める曲線群においては, 直交性から (x, y) における接線の傾きは $-\frac{x+y}{x-y}$ である. よって, 求める曲線群の満たす微分方程式は,

$$y' = -\frac{x+y}{x-y}. \quad (\text{E})$$

これを解けばよい. 同次形であるから, $z = \frac{y}{x}$ とおいて y を消去する.

$$y = xz, \quad y' = z + xz'.$$

これらを (E) に代入して,

$$z + xz' = -\frac{x+xz}{x-xz} = -\frac{1+z}{1-z}.$$

計算して,

$$xz' = \frac{z^2 - 2z - 1}{1 - z}.$$

よって,

$$\frac{2z-2}{z^2-2z-1} dz = -2 \frac{dx}{x}.$$

積分して,

$$\log |z^2 - 2z - 1| = -2 \log |x| + C \iff \log |z^2 - 2z - 1| + 2 \log |x| = C$$

定数 C をあらためて書き直して,

$$x^2(z^2 - 2z - 1) = C$$

z を元に戻して,

$$y^2 - 2xy - x^2 = C.$$

再び, C を書き直して,

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

これは与えられた曲線群の方程式 $x^2 - 2xy - y^2 = C$ において x と y を入れ替えたものである. よって位置関係は直線 $y = x$ に関して対称である.

また, $x^2 - 2xy - y^2 = C$ は双曲線である. これは, 座標軸を回転してみればわかる. 座標軸を θ 回転させてできる新しい座標軸を (X, Y) で表せば,

$$\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

$x^2 - 2xy - y^2 = C$ を XY 座標で表すと,

$$(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 - 2(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) - (X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = C.$$

計算して,

$$X^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) - 2XY(\cos 2\theta + \sin 2\theta) - Y^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = C.$$

そこで, $\cos 2\theta + \sin 2\theta = 0$ のように θ をとろう. 実際, $2\theta = -\pi/4$ つまり $\theta = -\pi/8$ ととれば, $\cos 2\theta = -\sin 2\theta = 1/\sqrt{2}$ なので,

$$\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 = C \iff X^2 - Y^2 = C/\sqrt{2}$$

となる. これらは双曲線である. 下図において, 実線で曲線群 $x^2 - 2xy - y^2 = C$ を, 点線でその直交曲線群を表している.

