2005 年度 解析学 A (C11105) 期末試験問題

実施: 2005. 7.25 (月) 8:50–10:20

- 解答は整然と文章によって記せ. **式だけ・答だけは採点対象外**とする. (Make up logical and clear sentences. Answers by only equations and symbols are exempt from marking.)
- 読めない解答は採点から除外する. (Illegible answers are immediately exempt from marking.)

1. 次の問に答えよ. (Answer the following questions.) [10 点 $\times 2 = 20$ 点]

(1) 平均値の定理を述べよ. (仮定, 結論をはっきりと. 証明不要.) (Mention the mean value theorem with clear statements of its assumption and conclusion. No proof is required.)

(2) 平均値の定理の応用例を**具体的に** 1 つ述べよ. (Illustrate an application of the mean value theorem.)

2. 次の積分を計算せよ. (Calculate the following integrals.) [10 点 $\times 2 = 20$ 点]

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^4 x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{2x^2+1}{4x^4+x^2}\, dx$

3. 次の問に答えよ. (Answer the following questions.) [10 点 ×3 = 30 点]

(1) α を実数とする. $(1+x)^\alpha$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開 (マクローリン展開) を求めよ. ただし, 収束の議論は不要である. (Let α be a real number. Find the Taylor (Maclaughlin) expansion of $(1+x)^\alpha$ around $x=0$. No need to discuss the convergence.)

(2) $\arcsin x$ の定義を述べ, 導関数を求めよ. (Mention the definition of $\arcsin x$ and find its derivative.)

(3) $\arcsin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開 (マクローリン展開) し, 5 次の近似式を求めよ. (係数は既約分数で示せ.) (Using the Taylor (Maclaughlin) expansion of $\arctan x$ around $x=0$, find the approximating polynomial of degree five.)

4. $n=1,2,\dots$ に対して

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

とおくとき, 次の各問に答えよ. (For $n=1,2,\dots$ define a_n as above. Answer the following questions.) [10 点 ×3 = 30 点]

(1) $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ. (Prove that $\{a_n\}$ is increasing and bounded from above.)

(2) $a_n > 1 - \dfrac{1}{n}\log 2$ を示せ. (Prove that $a_n > 1 - \dfrac{1}{n}\log 2$.)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. (Find the limit.)

2005 年度 解析学 A 期末試験 (実施: 2005．7.25) 略解

1. 略.

2. (1) いろいろな方法があるが, 部分積分による一例を示す.

$$\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin^3 x\,dx = [-\cos x \sin^3 x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \cdot 3\sin^2 x \cos x\,dx$$
$$= 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\,dx = 3\int_0^\pi (1-\sin^2 x)\sin^2 x\,dx.$$

移項して,

$$4\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = 3\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = 3\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{3}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

したがって,

$$\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}\pi.$$

(2) 有理関数の積分であるから, 部分分数展開からはじめる．分母は $x^2(4x^2+1)$ であることに注意して計算すれば,

$$\frac{2x^2+1}{4x^4+x^2} = \frac{-2}{4x^2+1} + \frac{1}{x^2}$$

がわかる．まず,

$$\int_{1/2}^\infty \frac{-2}{4x^2+1}\,dx = -\int_{1/2}^\infty \frac{d(2x)}{(2x)^2+1} = -\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} = -\left[\arctan x\right]_1^\infty = -\frac{\pi}{4}.$$

また,

$$\int_{1/2}^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^\infty = 2.$$

したがって,

$$\int_{1/2}^\infty \frac{2x^2+1}{4x^4+x^2}\,dx = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

3. (1) 二項展開としてよく知られている．収束の議論は難しいが, 係数を求めるだけなら簡単 (教科書参照).

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(2) $\arcsin x$ の定義は略．導関数も容易 (教科書参照).

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) $\arcsin x$ の 5 階導関数まで直接計算してもたいしたことはないが, (1) と (2) を組み合わせるほうが容易である.

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n}.$$

積分して,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \binom{-1/2}{1} \frac{x^3}{3} + \binom{-1/2}{2} \frac{x^5}{5} - \dots$$

ここで,

$$\binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}, \qquad \binom{-1/2}{2} = \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

よって, 求めるべき 5 次近似式は,

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5.$$

4. (1) $0 \leq x \leq 1$ において

$$1 \geq x \geq x^2 \geq x^3 \geq \cdots \geq 0.$$

よって

$$\frac{1}{1+1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \cdots \leq \frac{1}{1+0}$$

となり, 積分して,

$$\frac{1}{2} \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq 1.$$

(2)

$$1 - a_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

ここで, $x^n \leq x^{n-1}$ を用いれば,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n}\left[\log(1+x^n)\right]_0^1 = \frac{1}{n}\log 2.$$

こうして,

$$1 - a_n \leq \frac{1}{n}\log 2.$$

(3) (1) と (2) から,

$$1 - \frac{1}{n}\log 2 \leq a_n \leq 1.$$

これに「はさみうちの原理」を適用して,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(注意)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 \left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\right\} dx = 1.$$

は不十分な議論である. まず, 積分と極限の交換は無条件ではできない. $x = 1$ においては, 被積分関数の極限値は $1/2$ である.

2005 年度 解析学 A (C11105) 追試験問題

実施: 2005. 7.27 (水)

- 解答は整然と文章によって記せ. **式だけ・答だけは採点対象外**とする. (Make up logical and clear sentences. Answers by only equations and symbols are exempt from marking.)
- 読めない解答は採点から除外する. (Illegible answers are immediately exempt from marking.)

1. 次の問に答えよ. [10 点 ×2 = 20 点]

(1) 平均値の定理を述べよ. (仮定, 結論をはっきりと. 証明不要.)

(2) $f(x)$ を区間 (a, b) 上の関数で, すべての x で $f'(x) = 0$ を満たせば, $f(x)$ は定数であることを平均値の定理を用いて証明せよ.

2. 次の積分を計算せよ. (Calculate the following integrals.) [10 点 ×2 = 20 点]

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{2x^2+1}{4x^4+x^2} \, dx$

3. 次の問に答えよ. [15 点 $\times 2 = 30$ 点]

(1) α を実数とする. $f(x) = (1+x)^\alpha$ に対して $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{1+x^2}$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開 (マクローリン展開) し, 6 次の近似式を求めよ. (係数は既約分数で示せ.)

4. 次の極限値を求めよ. [15 点]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

5. $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

とおくとき, $a_n > 1 - \dfrac{1}{n} \log 2$ を示せ. [15 点]