

2005 年度 解析学 C (C31311) 期末試験問題

実施: 2005. 7.20 (水) 08:50–10:20

- 第 1 問は必答, 第 2 問から第 4 問のうちから 2 問だけを選択解答せよ. (Answer the question No.1. Select and answer two from among the questions No. 2 – No. 4.)
- 解答は整然と文章によって記せ. 式だけ・答だけは採点対象外とする. (Make up logical and clear sentences. Answers by only equations and symbols are exempt from marking.)
- 読めない解答は採点から除外する. (Illegible answers are immediately exempt from marking.)

1. [必答] 次の問に答えよ. (Answer the following questions.) [12 点 $\times$ 5 = 60 点]

(1) 曲線群 $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ を図示し, そららが満たす微分方程式を求めよ. (Draw the family of curves $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ and find a differential equation satisfied by them.)

(2) $xy' + 5y = 0$ の一般解を求めよ. (Find a general solution to $xy' + 5y = 0$.)

(3) $(x + 4)y' + 3y = 3$ の一般解を求めよ. (Find a general solution to $(x + 4)y' + 3y = 3$.)

(4) $\{e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x\}$ を基本解とする微分方程式を求めよ. (Find a differential equation whose fundamental solution is given by $\{e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x\}$.)

(5) 未知関数 $x = x(t), y = y(t)$ に関する連立微分方程式 $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ 3y' = x + 6y \end{cases}$ を解け. (Solve the above system of differential equations for unknown functions $x = x(t), y = y(t)$.)

2. [選択] $a > 0$ を実定数とする. 初期値問題

$$y'' + 2ay' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

の解 $y(t)$ を求め, $y = y(t)$ ($t \geq 0$) のグラフの概略を示せ. Let $a > 0$ be a constant number. Find the solution $y(t)$ to the above initial value problem and draw the graph $y = y(t)$ ($t \geq 0$.) [20 点]

3. [選択] ベキ級数法によって次の微分方程式の一般解を求めよ. 解はできるだけ整理した形で記せ. (Solve the following differential equation by using the method of power series. The solution should be in the most concise possible form.) [20 点]

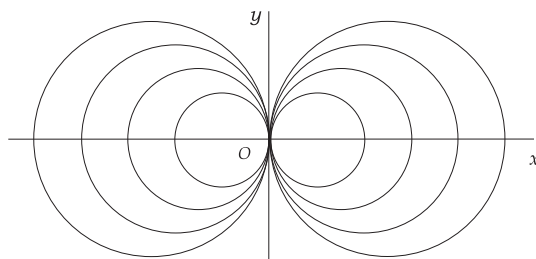
$$(1 - x^2)y' = 2xy$$

4. [選択] 次の方程式が完全形になるように定数 a, b を定めて, その方程式の一般解を求めよ. (Determine the constant numbers a, b so that the equation is exact. Then solve the equation.) [20 点]

$$(x^3 + xy^2)dx + (ax^2y + bxy^2)dy = 0$$

2005 年度 解析学 C (C31308) 期末試験解説

1. (1) まず, $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ が中心 $(c, 0)$ 半径 $|c|$ の円を表すことは明らか. c を動かして, そのような円がたくさんできる.



曲線群の図示を求めているのだから, 円を 1 個だけ, あるいは右半分しか描かないというものは不可.

曲線群の方程式に含まれる任意定数を消去すればよい. また, 任意定数が 1 個であることから微分方程式は 1 階である. $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ を x で微分して,

$$2(x - c) + 2yy' = 0, \quad \text{つまり} \quad c = x + yy'.$$

もとの式に代入して,

$$(yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2.$$

展開して整理すれば,

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

これが求める微分方程式である (教科書 p.45 も参照). なお, 微分方程式に任意定数 C が含まれているものなどは問題外である.

別解. 本来, 曲線群の方程式は $f(x, y) = C$ の形であり, それを表す微分方程式は $df = 0$ である. この問題では,

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2 \implies x^2 - 2cx + y^2 = 0 \implies \frac{x^2 + y^2}{2x} = c$$

であることから, $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$. よって, 求める微分方程式は, 全微分形で

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2x}\right) = 0.$$

後は左辺を計算すればよい.

(2) 変数分離形である.

$$x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

から

$$\frac{fy}{y} = -5 \frac{dx}{x}.$$

積分して,

$$\int \frac{dy}{y} = -5 \int \frac{dx}{x} + c \implies \log |y| = -5 \log |x| + c.$$

つまり,

$$y = \frac{C}{x^5}.$$

(3) これも変数分離形である. 与えられた方程式を

$$(x+4)y' = 3(1-y)$$

と変形すれば,

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{3dx}{x+4}$$

とできる. これを積分して,

$$-\log |1-y| = 3 \log |x+4| + c,$$

したがって,

$$1-y = \frac{C}{(x+4)^3}, \quad \text{つまり, } y = 1 - \frac{C}{(x+4)^3} \quad (1)$$

が得られる. (C は任意定数)

別解. $(x+4)y' + 3y = 0$ は線形方程式なので, 与えられた方程式を定数変化法で解いてもよい. まず, $(x+4)y' + 3y = 0$ を解こう.

$$-(x+4) \frac{dy}{dx} = 3y \implies \frac{dy}{y} = -\frac{3}{x+4} dx$$

と変形して, 積分すると,

$$\log |y| = -3 \log |x+4| + c.$$

つまり,

$$y = C(x+4)^{-3}.$$

与えられた微分方程式を解くために, 定数変化法を用いよう. 解を

$$y = u(x)(x+4)^{-3}$$

と想定して $(x+4)y' + 3y = 3$ に代入すると,

$$(x+4) \{u'(x+4)^{-3} + u(-3)(x+4)^{-4}\} + 3u(x+4)^{-3} = 3.$$

これを整理して,

$$u'(x+4)^{-2} = 3, \quad \text{つまり, } u' = 3(x+4)^2.$$

積分して,

$$u = (x+4)^3 + C.$$

よって, 求める解は,

$$y = \{(x+4)^3 + C\}(x+4)^{-3} = 1 + \frac{C}{(x+4)^3}.$$

これは (1) と同じことである.

別解. 上記で, 線形方程式 $(x+4)y' + 3y = 0$ の一般解 $y = C(x+4)^{-3}$ が見つかったあとで, 与えられた方程式の特殊解を求めることを考えてもよい.

$$(x+4)y' + 3y = 3$$

を見れば, 明らかに $y = 1$ が解である. よって, 求めるべき一般解は,

$$y = 1 + C(x+4)^{-3}.$$

(4) 求めるものは 2 階の定係数微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ である. その特性方程式の根が, $-1 \pm 2i$ で与えられるから,

$$a = -\{(-1+2i) + (-1-2i)\} = 2, \quad b = (-1+2i)(-1-2i) = 5.$$

よって, 求めるものは,

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

(5) 第一式から

$$y = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}x.$$

これを第 2 式に代入して,

$$x'' - 2x' = x + 2x' - 4x.$$

整理して,

$$x'' - 4x' + 3x = 0.$$

特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ を解くと, $\lambda = 1, 3$. したがって, 基本解は $\{e^t, e^{3t}\}$ となり, 一般解は,

$$x = Ae^t + Be^{3t} \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

これによって,

$$y = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}(Ae^t + 3Be^{3t}) - \frac{2}{3}(Ae^t + Be^{3t}) = -\frac{A}{3}e^t + \frac{B}{3}e^{3t}.$$

よって, 解は,

$$\begin{cases} x = Ae^t + Be^{3t}, \\ y = -\frac{A}{3}e^t + \frac{B}{3}e^{3t}. \end{cases} \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

分数が嫌なら, 定数を取り直して,

$$\begin{cases} x = -3Ae^t + 3Be^{3t}, \\ y = Ae^t + Be^{3t}. \end{cases}$$

A, B は任意定数であるが, 定数の入り方は $x(t), y(t)$ で関連している. 任意定数を 4 個入れている答案が散見されたが間違いである.

2. 特性方程式は

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0$$

であり、これを解けば、

$$\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

判別式 $a^2 - 1$ の符号によって場合分けする. ただし、問題文の仮定 $a > 0$ も考慮する.

(Case 1) $a > 1$ のとき. 特性根は相異なる 2 個の実数である. よって、一般解は、

$$y = Ae^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} + Be^{(-a-\sqrt{a^2-1})t}.$$

初期条件は、

$$0 = y(0) = A + B,$$

$$1 = y'(0) = A(-a + \sqrt{a^2 - 1}) + B(-a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

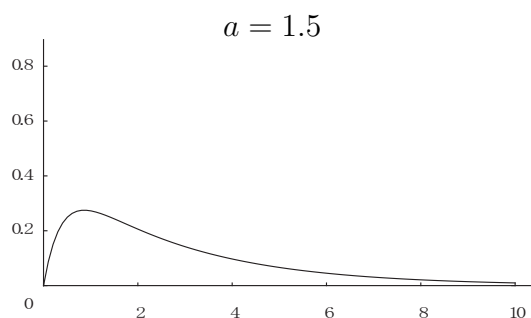
これを解いて、

$$A = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}, \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

したがって、

$$y = \frac{e^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} - e^{(-a-\sqrt{a^2-1})t}}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{e^{-(a-\sqrt{a^2-1})t}(1 - e^{-2\sqrt{a^2-1}t})}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

$a - \sqrt{a^2 - 1} > 0$ に注意せよ. これから、 $t > 0$ において $y > 0$ であり、極大を 1 回とって、 $x \rightarrow \infty$ で $y \downarrow 0$ となる.



(Case 2) $a = 1$ のとき. 特性方程式は重根 -1 をもつ. よって一般解は

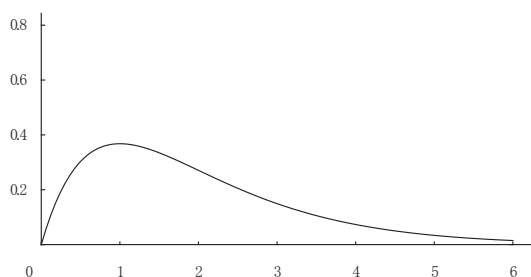
$$y = Ae^{-t} + Bte^{-t}.$$

初期条件から

$$0 = y(0) = A, \quad 1 = y'(0) = -A + B.$$

よって $B = 1$ であり、求める解は、

$$y = te^{-t}.$$



(Case 3) $0 < a < 1$ のとき. 特性根は,

$$-a + i\omega, \quad -a - i\omega, \quad \omega = \sqrt{1 - a^2}.$$

一般解は,

$$y = e^{-at}(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

初期条件から,

$$0 = y(0) = A, \quad 1 = y'(0) = -aA + B\omega.$$

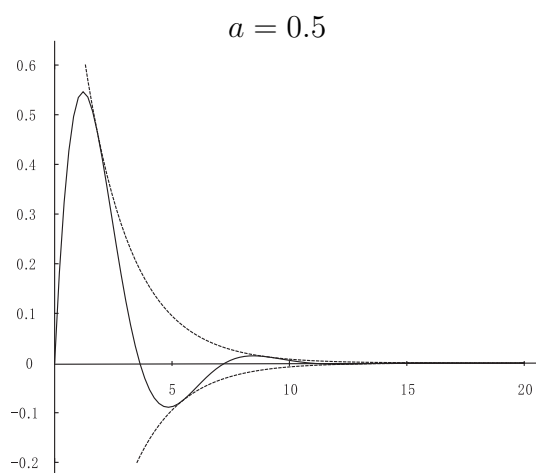
よって, $B = 1/\omega$. 求める解は,

$$y = \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin \omega t$$

θ を本来のパラメータで表して,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} e^{-at} \sin \sqrt{1 - a^2} t.$$

これは減衰振動である.



なお, 初期条件から, いずれの場合のグラフも原点を通り, 原点における接線の傾きが 1 になっている. 微分方程式を解く以前に簡単にわかることであるので, そうなっていないグラフを平気で書くとセンスが疑われる.

3. $y = \sum c_n x^n$ とおく.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$-x^2 y' = \sum_{n=0}^{\infty} -c_{n+1} (n+1) x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} -c_{n-1} (n-1) x^n$$

$$2xy = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} x^n. \quad (2)$$

としておくとも計算が容易.

$$(1-x^2)y' = c_1 + 2c_2x + \sum_{n=2}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-1}(n-1))x^n. \quad (3)$$

(2) と (3) を比較して,

$$0 = c_1, \quad 2c_0 = 2c_2, \quad 2c_{n-1} = c_{n+1}(n+1) - c_{n-1}(n-1), \quad n \geq 2.$$

最後の式は $c_{n-1} = c_{n+1}$ となる. 結局,

$$c_1 = 0, \quad c_{n-1} = c_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

よって, n が奇数なら $c_n = 0$. n が偶数なら, $c_n = c_0$. よって, 求める解は,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 x^{2n} = \frac{c_0}{1-x^2}.$$

係数 c_n の関係式に x が含まれるようなものを議論することは, べき級数法を理解していないことを意味する.

4. 完全形であるための必要十分条件を思い出せば簡単である.

$$P = x^3 + xy^2, \quad Q = ax^2y + bxy^2$$

とおく. $Pdx + Qdy = 0$ が完全形となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である. 計算して,

$$2xy = 2axy + by^2$$

よって,

$$a = 1, \quad b = 0$$

となる. 解くべき完全微分方程式は,

$$(x^3 + xy^2)dx + x^2ydy = 0$$

ちょっとみれば,

$$u = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2$$

に対して,

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

したがって, 微分方程式は

$$du = 0$$

一般解は $u = C$. したがって, 求めるべき解は,

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$$

となる.