数学概論 B 補充プリント (2006.04.24)

● **参考書：** 演習問題を解きながら力をつけたい方へ

1. 大野ほか「演習線形代数」（共立）
2. 岩井「基礎課程　線形代数」（学術図書）

● **行列の積の練習をしましょう.** (答はウェッブページに掲載)

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
とする. 次の行列を計算せよ.
$$AB, \qquad BA, \qquad BC, \qquad CB, \qquad CA, \qquad AC$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
とする. 次の行列を計算せよ.
$$AB, \qquad BA, \qquad AC, \qquad CA, \qquad BC, \qquad CB$$

3. n 次行列 X が次のように与えられているとき, べき乗 $X^2, X^3, X^4, \ldots$ を計算せよ.
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

1. AB, CB, CA は定義できない.

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 18 \\ -2 & 4 & -14 \end{pmatrix}, \qquad BC = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad AC = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

2.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}, \qquad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad BC = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CB = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. たとえば, $n = 4$ として 4 次の場合を考えてみると,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

となり, 以降は $X^4 = X^5 = X^6 = \cdots = 0$ (零行列) である. サイズが大きくなっても同様で, X^{n-1} のとき 1 が右上の角に 1 箇所残り, X^n 以降は全部 0 になる.

数学概論 B 補充プリント (2006.05.01)

1. 次の行列の逆行列を「掃き出し法」で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. A, B, C を n 次行列とするとき,

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つことを, 行列の成分の一般項を用いて示せ.

3. n 次行列 X が次のように与えられているとき, べき乗 $X^2, X^3, X^4, \ldots$ を計算せよ.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 上の行列 X の逆行列を求めよ. 掃き出し法でやろうとする前によく考えて!

解答

1. 掃き出し法の手順は多様である．ここに示したのは一例にすぎない．

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\times\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{5} & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -1 \\ \dfrac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(3)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)-(3)\times 5]{(1)+(3)\times 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A = (a_{ij})$, $B(b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ とおく. まず,

$$AB = (x_{ij}), \qquad x_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \tag{1}$$

なので,

$$(AB)C = (y_{ij}), \qquad y_{ij} = \sum_\ell x_{i\ell} c_{\ell j}$$

(1) の x_{ij} の j を ℓ に書き直して, 上の式に代入すると,

$$y_{ij} = \sum_\ell x_{i\ell} c_{\ell j} = \sum_\ell \left(\sum_k a_{ik} b_{k\ell} \right) c_{\ell j} = \sum_{\ell,k} (a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j} \tag{2}$$

次に,

$$BC = (z_{ij}), \qquad z_{ij} = \sum_k b_{ik} c_{kj}$$

から

$$A(BC) = (u_{ij}), \qquad u_{ij} = \sum_\ell a_{i\ell} z_{\ell j} \, .$$

したがって,

$$u_{ij} = \sum_{\ell} a_{i\ell} z_{\ell j} = \sum_{\ell} a_{i\ell} \left(\sum_{k} b_{\ell k} c_{kj} \right) = \sum_{\ell, k} a_{i\ell} (b_{\ell k} c_{kj}) \tag{3}$$

ここで, (2) と (3) を比較する. (3) の和において, k, ℓ を入れ替えて書いても結局は全部足すことになるので,

$$u_{ij} = \sum_{\ell, k} a_{ik} (b_{k\ell} c_{\ell j})$$

さらに, 数の計算では $(ab)c = a(bc) = abc$ であるから,

$$u_{ij} = \sum_{\ell, k} a_{ik} (b_{k\ell} c_{\ell j}) = \sum_{\ell, k} (a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j} = y_{ij}$$

つまり, $(AB)C$ と $A(BC)$ の ij 成分は等しい. i, j は任意であったから, 行列として $(AB)C = A(BC)$.

3. たとえば, $n = 5$ ならば,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このように, 各行の 1 の位置が右に 1 つずつずれてゆき, それ以上場所がなくなったら, 左端から現れる. $X^5 = E$ となるから, $X^6, X^7, \ldots$ は $X, X^2, \ldots$ と同じである.

一般の n のときは, $X^n = E$ となるから,

$$X^{5n+k} = X^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

が一般に成り立つ.

4. $X^n = E$ を $XX^{n-1} = E$ と変形すればわかるように,

$$X^{-1} = X^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

数学概論 B 補充プリント (2006.05.15)

● まだまだ続く掃き出し法

1. 次の連立方程式を掃き出し法で解け.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 4y = -6 \\ 3x - 2y = 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 4y + 3z = 6 \\ 3x - 2y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = -5 \end{cases}$$

2. 次の連立方程式を掃き出し法で解け. 解の違いを観察せよ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -2x + 6y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 6y = 4 \\ -2x + 4y = -3 \end{cases}$$

3. 次の行列の逆行列を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

1. 掃き出し法の手順は多様である．ここに示したのは一例にすぎない．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times\frac{1}{8}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2,\ y = 1.$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\times(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 10,\ y = 1.$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)\times 3]{(3)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & 10 & 7 & 13 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\times(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & 10 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)+(2)\times 4]{(3)-(2)\times 10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\times(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)-(3)]{(2)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x = -1,\ y = 2,\ z = -1$

2. 解が一意に求まる場合, そうでない場合に掃き出し法がどうなるかを観察する.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 7/2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\times\frac{2}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)\times\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解は一意的であって, $x = 1$, $y = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これ以上, 基本変形を続けることはできない.

$$x - 3y = -2$$

が残った. これを満たすすべての (x, y) は連立方程式の解になる. つまり, 解は無限個ある.

$$x = 3y - 2, \qquad y \text{ は任意}$$

のように書いておこう.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

最後の行列は, 連立方程式

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases}$$

を表すが, 最後の式はどんな x, y をとっても成り立たない. つまり, 連立方程式の解はない.

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)-(3)]{(2)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)+(1)\times 2]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

これ以上, 基本変形を続けても左側に単位行列を作ることはできない. よって, 逆行列はない.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(4)\times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)-(4)\times b]{(3)-(4)\times c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

数学概論 B 補充プリント (2006.05.22)

1. 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の連立方程式を掃き出し法で解け.

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x + 5y - 2z & = 10 \\ x + y + 7z & = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ 3x + 5y - z & = 4 \end{cases}$$

3. (発展) 次の連立方程式を掃き出し法で解け.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 5x_4 & = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 5x_4 & = 6 \\ -x_1 + 7x_2 - 23x_3 + 3x_4 & = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 & = 17 \end{cases}$$

● 和算について

1. 小倉金之助「日本の数学」岩波新書

   古い本だが，近世日本数学史への良い入門書. 英訳もある.

2. 村田全「日本の数学　西洋の数学」中公新書

   西洋数学と日本数学という二つの数学的伝統を比較検討.

3. 佐藤健一「江戸庶民の数学」東洋書店

   実用数学分野を中心として，原文が現代語訳されている.

● 数学に近づく

1. 遠山啓「数学入門〈上下〉」岩波新書

2. 柳谷晃「これはすごい!数学が使える人の問題解決法」 丸善

   サラリーマンや学生が日常で直面するケースについて, 数学の, 簡単で便利な役立て方を非常にやさしく解説した本であるらしい.

3. 瀬山士郎「ゼロから学ぶ数学の 1,2,3」講談社

   「マイナス×マイナスはなぜプラス?」「分数のわり算はどうしてひっくり返してかけるの?」など, いまさら人に聞けない素朴な疑問に答える.

4. 森毅「数学的思考」講談社学術文庫 979

5. 四方義啓「数学をなぜ学ぶのか」中公新書 1697

   著者独特の語り口.

6. 吉田武「オイラーの贈物」ちくま学芸文庫

   人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ. 行列や複素数についても解説.

7. 金田康正「π のはなし」東京図書

   $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971\ldots$ を並列計算機 (日立) を用いて 1 兆 2411 億桁まで計算した人 (2002) による円周率物語.

身一つ世一つ生く（る）に無意味

産医師異国に向こう. 産後やくなく, 産婦みやしろに, 虫さんざん闇になく, ご礼には早よいくな

Can I find a trick recalling pi easily?

解答

1. (1)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[(2)-(1)\times4]{(3)-(1)\times7}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)-(3)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{よって 階数は}2$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1&1&4&2\\2&2&5&1\\1&3&6&-1\\-4&-2&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(2)-(1)\times2\\(3)-(1)\\(4)+(1)\times4}}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&0&-3&-3\\0&2&2&-3\\0&2&9&12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-(4)}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&0&-3&-3\\0&0&-7&-15\\0&2&9&12\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(4)}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&2&9&12\\0&0&-7&-15\\0&0&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)-(3)\times\frac{3}{7}}\begin{pmatrix}1&1&4&2\\0&2&9&12\\0&0&-7&-15\\0&0&0&24/7\end{pmatrix}\qquad \text{よって階数は }4$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\4&4&4&5&-1\\-1&-2&-3&1&-1\\3&2&7&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(2)-(1)\times4\\(3)+(1)\\(4)-(1)\times3}}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\0&-4&-8&9&-5\\0&0&0&0&0\\0&-4&-2&5&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\0&-4&-8&9&-5\\0&-4&-2&5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\0&-4&-8&9&-5\\0&0&6&-4&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって階数は3

2. 拡大係数行列を作って掃き出し法を試みよ.

(1)

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&5&-2&10\\1&1&7&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)\times 2}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&3&-4&10\\0&0&6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)\times\frac{1}{6}]{(2)\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&-4/3&10/3\\0&0&1&-2/3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{pmatrix}1&0&7/3&-10/3\\0&1&-4/3&10/3\\0&0&1&-2/3\end{pmatrix}\xrightarrow[(2)+(3)\times\frac{4}{3}]{(1)-(3)\times\frac{7}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0&-16/9\\0&1&0&22/9\\0&0&1&-2/3\end{pmatrix}$$

したがって, $x=-\dfrac{16}{9}$, $y=\dfrac{22}{9}$, $z=-\dfrac{2}{3}$.

(2)

$$\begin{pmatrix}2&1&1&3\\3&5&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)-(1)}\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&4&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{pmatrix}1&4&-2&1\\2&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)\times 2}\begin{pmatrix}1&4&-2&1\\0&-7&5&1\end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列の階数と係数行列の階数は一致して 2 である. よって解はある. さらに未知数の個数は 3 なので自由度は 1. したがって, 解には 1 個の任意定数が含まれる.

掃き出し法を続けると,

$$\begin{pmatrix}1&4&-2&1\\0&-7&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\times\frac{4}{7}}\begin{pmatrix}1&0&6/7&11/7\\0&-7&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\times(-\frac{1}{7})}\begin{pmatrix}1&0&6/7&11/7\\0&1&-5/7&-1/7\end{pmatrix}$$

これより,

$$x=-\frac{6}{7}z+\frac{11}{7},\qquad y=\frac{5}{7}z-\frac{1}{7}.$$

z は任意にとってよい (z は任意定数で, 確かに任意定数は 1 個)

3.

$$\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\2&5&-11&5&6\\-1&7&-23&3&13\\3&1&3&-1&17\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(2)-(1)\times 2\\(3)+(1)\\(4)-(1)\times 3}}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&-5&15&-5&0\\0&12&-36&8&16\\0&-14&42&-16&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2)\times(-\frac{1}{5})\\(3)\times\frac{1}{12}\\(4)\times(-\frac{1}{14})}}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&1&-3&1&0\\0&1&-3&2/3&4/3\\0&1&-3&8/7&-4/7\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{(1)-(2)\times 5\\(3)-(2)\\(4)-(2)}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-3&1&0\\0&0&0&-1/3&4/3\\0&0&0&1/7&-4/7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)\times 7]{(3)\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\mathrm{rank}(\text{拡大係数行列}) = \mathrm{rank}(\text{係数行列}) = 3 < 4 = \text{未知数の数}$$

よって, 連立方程式に解は存在し, 任意定数を 1 個含むはず. 最後の結果をよく見ると, はじめの 2 行から $x_3 = c$ を任意定数として,

$$x_1 = -2c + 3, \qquad x_2 = 3c + 4, \qquad x_3 = c, \qquad x_4 = -4$$

のように解が求まる. なお, 解の表示法は一通りではない.

数学概論 B 補充プリント (2006.05.29)

● 行列式の計算を練習しよう.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & x & -1 \\ c & 0 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ -4 & 5 & -6 & -6 \\ -2 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

解答.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 5 \times (-2) = 12, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \{2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot (-1)\} - \{1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \cdot (-2)\} \\ &= 6 - (-1 - 30) = 37. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^2 + b^3 + c^3 - 3abc, \qquad \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & x & -1 \\ c & 0 & x \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ -4 & 5 & -6 & -6 \\ -2 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -924$$

数学概論 B 補充プリント (2006.06,12)

1. 行列 A, B, C, D を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A, B, C, D の型は何か. また, 次の行列の計算をせよ.

$$A + A^{-1} \qquad AB \qquad BA \qquad BC \qquad CB \qquad DC \qquad 2D$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, E を 2 次の単位行列とするとき, 次の等式を示せ.

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0$$

3. 次の行列の階数を求めよ. また, 逆行列を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

4. 次の連立方程式を行列表示せよ. 次に, 掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{cases} 3x + y = -5 \\ -x + y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + z = -5 \\ -x + y - z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4y + 6z = -2 \\ 3x + 2y - 7z = 13 \\ 5x - 7y + 9z = 1 \end{cases}$$

解答

1. A: 2×2 型, B: 3×2 型, C: 4×3 型, D: 1×4 型

$$A+A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5/3 & 1/3\end{pmatrix}\qquad AB \text{ 定義できない}\qquad BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\qquad BC \text{ 定義できない}$$

$$CB=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -6 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad DC=\begin{pmatrix}5 & -6 & 2\end{pmatrix}\qquad 2D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 12\end{pmatrix}$$

2. ケーリー・ハミルトンの定理として知られている公式である. 代入して計算するだけ.

$$\begin{aligned}&A^2-(a+d)A+(ad-bc)E\\ &=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+ad & bc+d^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(a+d)a & (a+d)b\\ (a+d)c & (a+d)d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=0.\end{aligned}$$

3. 逆行列を求めるための掃き出し法を行おう.

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+(1)\times\frac{1}{2}]{(2)-(1)}\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\times(-2)}\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+(2)]{(1)+(2)\times 3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & -2 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)-(3)\times 4}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

左半分だけをみれば, 基本変形の結果, 階段行列 (実は単位行列) にできている. その形から, 階数は 3. また, 逆行列は,

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 2 & -4 & 5\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+(1)\times 2]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-(2)\times 3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

左半分の基本変形とみなせば, 最後の形は階段行列であり, その階数は 2. 行列は 3 次であるから, 階数が不足し逆行列は存在しない.

4. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times 3} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって, $x = -2$, $y = 1$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 4/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)\times \frac{3}{4}]{(1)\times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)\times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\mathrm{rank}(\text{拡大係数行列}) = \mathrm{rank}(\text{係数行列}) = 2$$

であり, 変数の個数 3 から 自由度 $3 - 2 = 1$ がわかる. 連立方程式の解は任意定数 1 個を用いて表される. したがって, 残された式は

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = -2 \\ y - \frac{1}{2}z = 1 \end{cases}$$

z の項を右辺に移項して,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}z - 2 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \end{cases}$$

ここで z は任意である. そこで, $z = 2k$ とでもおけば, 求めるべき連立方程式の解は

$$\begin{cases} x = -k - 2 \\ y = k + 1 \\ z = 2k \end{cases} \qquad k \text{ は任意}$$

のようにまとめることができる.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & -7 \\ 5 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & -7 & 13 \\ 5 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -7 & 13 \\ 5 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)\times 5]{(2)-(1)\times 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & -16 & 16 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)\times\frac{1}{8}]{(3)\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)+(2)\times 2]{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{cases} x = k + 3 \\ y = 2k + 2 \\ z = k \end{cases} \qquad k \text{ は任意定数}$$

数学概論 B 補充プリント (2006.06.19)

1. 次の行列式を, 1 行目に関する余因子展開, 2 行目に関する余因子展開, 3 行目に関する余因子展開, の 3 通りの方法で計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式を, 2 列目に関する余因子展開で計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列式を行に関する基本変形を利用して計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

4. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

1. 1 行目に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(+1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 5(+1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(+1)4 + 3(-1)(-6) + 5(+1)2 = 8 + 18 + 10 = 36.$$

2 行目に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 0(+1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)(-1)(10) + 0(+1)(-15) + 2(-1)(-13) = 10 + 26 = 36.$$

3 行目に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(+1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(+1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 3(+1)6 + (-2)(-1)9 + 0(+1)3 = 18 + 18 = 36.$$

2.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(+1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ここで 3 次の行列式はサラスの公式などで別に計算する.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 3 = 15. \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 30) - (-6 + 5) = 35.$$

よって,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)15 + 2(+1)35 = 25.$$

3.

$$
\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -7 & 1 \end{vmatrix} \qquad [(2)+(1),\ (3)-(1)\times 3,\ (4)-(1)\times 2]
$$

$$
= \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix} \qquad [1\text{ 列目に関する余因子展開}]
$$

$$
= \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 17 & -10 & 0 \\ 11 & -11 & 0 \end{vmatrix} \qquad [(2)-(1)\times 2,\ (3)-(1)]
$$

$$
= \begin{vmatrix} 17 & -10 \\ 11 & -11 \end{vmatrix} \qquad [3\text{ 列目に関する余因子展開}]
$$

$$
= 11 \begin{vmatrix} 17 & -10 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad [\text{共通因子をくくりだす}]
$$

$$
= 11(-17-(-10)) = -77.
$$

$$
\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ x+z & y+x & z+y \end{pmatrix} \qquad [(3)+(1)]
$$

$$
= \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ y+x+z & z+y+x & x+z+y \end{pmatrix} \qquad [(3)+(2)]
$$

$$
= (x+y+z) \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [(3)\text{ 共通因子}]
$$

$$
= (x+y+z) \begin{pmatrix} 0 & y-x & z-x \\ 0 & z-y & x-y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [(1)-(3)\times x, \quad (2)-(3)\times y]
$$

$$
= (x+y+z) \begin{pmatrix} y-x & z-x \\ z-y & x-y \end{pmatrix} \qquad [3\text{ 行目に関する余因子展開}]
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+y+z)((y-x)(x-y)-(z-x)(z-y)) \\
&= (x+y+z)(-x^2-y^2+2xy-z^2-xy+yz+zx) \\
&= -(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)
\end{aligned}
$$

直接サラスの公式などで計算すると, $3xyz-x^3-y^3-z^3$ となる. 上の方法によって, 因数分解が得られたのである.

4. (1) 固有値を求めるために, 固有方程式 $|\lambda E - A| = 0$ を解く. まず,

$$\begin{aligned}|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0\end{aligned}$$

となって, 固有値 $\lambda = -1, 4$ が求まる.

固有ベクトルは $Av = \lambda v$ をみたす v である. 移項して $(\lambda E - A)v = 0$ を解いてもよい.

(i) $\lambda = -1$ のとき,

$$(\lambda E - A)v = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

掃き出し法で解こう.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\times(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{aligned}&(\text{拡大係数行列}) = (\text{係数行列}) = 1 \\ &\text{未知数の個数} = 2 \\ &\text{自由度} = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

つまり, 解には任意係数を 1 つ含む. 最後の形から, 残された方程式は

$$x - y = 0$$

であるから, $y = k$ を任意とすれば, $x = k$. つまり, -1 に属する固有ベクトルは

$$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

(ii) $\lambda = 4$ のときも同様である.

$$(\lambda E - A)v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

掃き出し法で解こう.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $2x + 3y = 0$ だけが残る. $y = -2k$ を任意とすれば, $x = 3k$. つまり, 4 に属する固有ベクトルは

$$k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

(2) も同様である. 固有値 5 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

固有値 -1 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

● 意欲あるものは次の行列の固有値と固有ベクトルを求めてみよう.

$$(1) \quad \begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\4 & 5 & -10\\2 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad\qquad (2) \quad \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\2 & 3 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

答. (1) 固有値 3 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

固有値 2 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

固有値 1 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトル

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad k_1,\, k_2 \text{ は任意の定数}$$

固有値 4 に属する固有ベクトル

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad k \text{ は任意の定数}$$

数学概論 B 期末試験 (2006.07.10)

● 解答例はウェッブページに掲載する.

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 ×4 = 20 点]

(1) A は何行何列の行列か?

(2) A の $(2,3)$ 成分は何か?

(3) 行に関する基本変形を施して, A を階段行列に変形せよ.

(4) A の階数を求めよ.

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の行列を計算せよ. [5 点 ×4 = 20 点]

$$-2X \qquad XY \qquad YX \qquad Y^2 + Y$$

3. 行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 $\times 5 = 25$ 点]

(1) $(1,1)$ 余因子, $(1,2)$ 余因子, $(1,3)$ 余因子を求めよ.

(2) B の行列式を 1 行目に関する余因子展開を用いて求めよ.

(3) B の行列式をサラスの方法で求めよ.

4. 連立方程式 $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$ について以下の問に答えよ. [5 点 $\times 4 = 20$ 点]

(1) 係数行列を書け.

(2) 拡大係数行列を書け.

(3) 自由度を求めよ.

(4) 解を求めよ.

5. 次の行列が逆行列をもたないように x を定めよ. [15 点]

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

数学概論 B 期末試験 (2006.07.10) 解答例

1. (1) 3 行 4 列

(2) 0

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)-(1)\times 4]{(3)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なお, 最後の階段行列は別の形もありうる.

(4) 階数は 2.

2.

$$-2X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad XY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

YX は定義できない

$$Y^2 + Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (1)

$$(1,1)\ \text{余因子} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$(1,2)\ \text{余因子} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$(1,3)\ \text{余因子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

(2)

$$|B| = (-1)\times(-7) + 7\times 1 + 0\times 3 = 14.$$

(3)

$$\begin{aligned} |B| &= \{(-1)\times 1\times 3 + 0\times 1\times 5 + 2\times 7\times 2\} - \{0\times 1\times 2 + 3\times 7\times 1 + 5\times 2\times(-1)\} \\ &= 25 - 11 = 14. \end{aligned}$$

4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 拡大係数行列の基本変形を行う.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって, rank(係数行列) = rank(拡大係数行列) $= 2$. 未知数の個数は 3. よって,

$$\text{自由度} = 3 - 2 = 1.$$

(4) 拡大係数行列の最後の形から,

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + 4z = 2 \end{cases}$$

が得られる. 自由度 1 なので z を任意定数 k として,

$$x = -k + 2, \qquad y = -4k + 2, \qquad z = k \qquad (k \text{ は任意定数})$$

5. 行列式が 0 になるように x を定める.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x^2 - 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} x^2 - 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(x^2 - 9) \begin{vmatrix} -1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(x^2 - 9)(-1 - x)$$

したがって, 求める x は $x = \pm 3, -1$.

数学概論 B 期末試験 (追試験)(2006.08.02)

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 $\times 4 = 20$ 点]

(1) A は何行何列の行列か?

(2) A の $(2,3)$ 成分は何か?

(3) 行に関する基本変形を施して, A を階段行列に変形せよ.

(4) A の階数を求めよ.

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の行列を計算せよ. [5 点 $\times 4 = 20$ 点]

$$-2X \qquad XY \qquad YX \qquad Y^2 + Y$$

3. 行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 $\times 5 = 25$ 点]

(1) $(1,1)$ 余因子, $(1,2)$ 余因子, $(1,3)$ 余因子を求めよ.

(2) B の行列式を 1 行目に関する余因子展開を用いて求めよ.

(3) B の行列式をサラスの方法で求めよ.

4. 連立方程式 $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$ について以下の問に答えよ. [5 点 $\times 4 = 20$ 点]

(1) 係数行列を書け.

(2) 拡大係数行列を書け.

(3) 自由度を求めよ.

(4) 解を求めよ.

5. 次の行列が逆行列をもたないように x を定めよ. [15 点]

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$